



ISSN : 2458-7494

E-ISSN: 2458-7613

# KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ DERGİSİ

KIRKLARELİ UNIVERSITY  
JOURNAL of ENGINEERING and SCIENCE

---

Cilt / Volume:2

Sayı / Number:1

Haziran / June 2016

---

Kırklareli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

<http://fbedergi.klu.edu.tr>

e-mail:fbedergi@klu.edu.tr

editor@klu.edu.tr



**KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ / KIRKLARELİ UNIVERSITY**  
**MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ DERGİSİ / JOURNAL of ENGINEERING and SCIENCE**

**Sahibi / Owner**

**Kırklareli Üniversitesi Rektörlüğü Adına / Owner on Behalf of Kırklareli Rectorship**  
Prof. Dr. Mustafa AYKAÇ (Rektör)

**Editör / Editor**

Prof. Dr. Bülent ŞENGÖRÜR

**Yardımcı Editörler / Associate Editors**

Doç. Dr. Erol TÜRKEŞ  
Yrd. Doç. Dr. Burak ÖZŞAHİN

**Yayın Kurulu / Editorial Board**

Prof. Dr. Bülent ŞENGÖRÜR  
Prof. Dr. A. Sabih ATADAN  
Doç. Dr. Erol TÜRKEŞ  
Doç. Dr. Meryem ÇAMUR  
Doç. Dr. Serpil AKÖZCAN  
Yrd. Doç. Dr. Sencer Süreyya KARABEYOĞLU  
Yrd. Doç. Dr. Burak ÖZŞAHİN  
Yrd. Doç. Dr. Cemil ÖZYAZGAN

**Sorumlu Yazı İşleri Müdürü / Editing Manager**

Kenan SEZEN

**İnternet Adresi / Web Address**

<http://fbedergi.klu.edu.tr>

**Yazışma Adresi / Correspondence Address**

Kırklareli Üniversitesi Kavaklı Yerleşkesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü  
Değirmencik Yolu Üzeri Kavaklı / Kırklareli  
e-mail:fbedergi@klu.edu.tr  
Tel: 0 (288) 246 15 16  
Fax: 0 (288) 246 16 02

**Baskı / Publisher**

Kırklareli Üniversitesi Matbaası / Kırklareli University Publishing Centre

**Yayın Türü / Publication Type**

Yaygın Süreli Yayın / National Periodical

Yılda iki kez yayınlanır: Haziran, Aralık / Twice a year: June, December

Bu sayı 100 adet basılmıştır / This issue published as 100 copies

Basım Tarihi / Publication Date: 30.06.2016



**KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ / KIRKLARELİ UNIVERSITY**  
**MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ DERGİSİ / JOURNAL of ENGINEERING and SCIENCE**

**Danışma Kurulu / Advisory Board**

Abdurrahman GÜNER, İstanbul Üniversitesi, İstanbul  
A. Fevzi BABA, Marmara Üniversitesi, İstanbul  
A. Sabih ATADAN, Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli  
Aleksandar GEORGIEV, Sofya Teknik Üniversitesi, Bulgaristan  
Asım KURTOĞLU, Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli  
Bülent AKBAŞ, Gebze Teknik Üniversitesi, Kocaeli  
Bülent ŞENGÖRÜR, Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli  
Deris STIAWAN, Sriwijaya University, Endonezya  
Emrah DOĞAN, Sakarya Üniversitesi, Sakarya  
Erol TÜRKEŞ, Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli  
Fahri VATANSEVER, Uludağ Üniversitesi, Bursa  
F.Onur HOCAOĞLU, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyonkarahisar  
Gökhan GÖKMEN, Marmara Üniversitesi, İstanbul  
Göksel DEMİR, Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli  
Hasan DEMİR, Namık Kemal Üniversitesi, Tekirdağ  
Hatice ŞANLIDERE ALOĞLU, Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli  
İsmail KIYAK, Marmara Üniversitesi, İstanbul  
Kadir GÜLER, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul  
Kanat Burak BOZDOĞAN, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Çanakkale  
Kamil KAHVECİ, Trakya Üniversitesi, Edirne  
Lambros EKONOMOU, Hellenic American University, Yunanistan  
M. Hakan HOCAOĞLU, Gebze Teknik Üniversitesi, Kocaeli  
Meryem ÇAMUR, Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli  
M.S. Bhaskar RANJANA, Marathwada Institute of Technology, Hindistan  
Murat BOSTANCIOĞLU, Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas  
Murat KARAHAN, Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya  
Mustafa BİRİNCİ, İnönü Üniversitesi, Malatya  
Nadide SEÇKİN, İstanbul Kültür Üniversitesi, İstanbul  
Osman KILIÇ, Marmara Üniversitesi, İstanbul  
Osman Nuri UÇAN, İstanbul Aydın Üniversitesi, İstanbul  
Ramazan ÇAĞLAR, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul  
Sarp ERTÜRK, Kocaeli Üniversitesi, Kocaeli  
Serpil AKÖZCAN, Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli  
Sezai TAŞKIN, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa  
Veselina Nedeva, Trakia Üniversitesi, Bulgaristan  
Yılmaz ÇAN, Trakya Üniversitesi, Edirne  
Youcef Soufi, University of Tébessa, Cezayir  
Yunus BİÇEN, Düzce Üniversitesi, Düzce  
Yüksel OĞUZ, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyonkarahisar  
Zafer AĞDELEN, Girne Amerikan Üniversitesi, KKTC  
Witold Charatonik, University of Wroclaw, Polonya



KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ / KIRKLARELİ UNIVERSITY  
MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ DERGİSİ / JOURNAL of ENGINEERING and SCIENCE

### İçindekiler / Contents

<b>Turhan CİVELEK;</b> APPLICATION OF SOCIAL COMPUTING ANALYSIS VIA ATTITUDES OF MEDIA USERS.....	<b>1-12</b>
<b>Yasin ÜNLÜTÜRK;</b> ON CURVES OF CONSTANT WIDTH DUE TO THE BISHOP FRAME OF TYPE-2 IN DUAL EUCLIDEAN SPACE $D^3$ .....	<b>13-21</b>
<b>Süha YILMAZ, Şuur NİZAMOĞLU;</b> A NOTE ON SPECIAL CURVES IN $E_1^4$ .....	<b>22-37</b>
<b>Nihat PAMUK;</b> KAOTİK ATEŞBÖCEĞİ OPTİMİZASYON ALGORİTMASI KULLANILARAK TERMİK GÜÇ SANTRALLERİ ETKİSİNDEKİ EKONOMİK YÜK DAĞITIM PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ.....	<b>38-59</b>
<b>Engin HÜNER, Yekta ATAÖZDEN ;</b> KÜÇÜK GÜÇLÜ RÜZGAR TÜRBİNLERİ İÇİN 3D SEY PROGRAMI İLE IPMS ALTERNATÖRÜN ELEKTROMANYETİK TASARIMI VE ANALİZİ.....	<b>60-73</b>
<b>Özen ÖZER;</b> NOTES ON ESPECIAL CONTINUED FRACTION EXPANSIONS AND REAL QUADRATIC NUMBER FIELDS.....	<b>74-89</b>

# APPLICATION OF SOCIAL COMPUTING ANALYSIS VIA ATTITUDES OF MEDIA USERS

Turhan CİVELEK

*Department of Software Engineering, The University of Kirkkareli Turkey*

## Abstract

Analyzing and modeling of social platforms and media data are rather developed and still developing today. Social behaviors are analyzed and characterized with social and artificial intelligence, statistical methods, analytical approaches and evolutionary algorithms. Data mining and machine learning are used in the social computing. In this study, social computing included, two surveys used a questionnaire with 43 different questions handed over in random sample to 537 different high school students in Istanbul. Social media attitudes of students were evaluated using J48 algorithm. According to J48 algorithm, which constitutes machine learning, learning took place for 14 questions out of 43. The analysis produced a Kappa Statistic (K) value of 0.446 and F-Measure of 0.701. A decision tree was created to support decision-making.

**Keywords:** Social Computing, Machine Learning, J48 Algorithm, Decision Tree.

## Özet

Günümüzde sosyal platform ve medya verilerinin analiz ve modellenmesi gelişmektedir. Sosyal zeka, yapay zeka, istatistiksel yöntemler, analitik yaklaşımlar ve evrimsel algoritmalarla sosyal davranışlar analiz ve karakterize edilmektedir. Veri madenciliği ve makine öğrenmesi sosyal bilgi işlem analizinde kullanılmaktadır. Sosyal bilgi işlem içerikli bu çalışmada İstanbul'da rastgele seçilen farklı liselerden 537 lise öğrencisine iki anket yapılmıştır. Anketler sonucunda elde edilen veriler J48 algoritması ile analiz edilmiştir. Makine öğrenmesi gerçekleştiren J48 algoritması 43 sorunun 14 sorusunda öğrenme gerçekleştirmiştir. Analiz sonucunda kappa değeri (K) 0.446 ve F değeri 0.701 bulunmuştur. Karar vermeyi desteklemek için karar ağacı elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Sosyal Bilgi İşlem, Makine Öğrenmesi, J48 Algoritması, Karar Ağacı.

Corresponding author. Tel: +90-288-2140514; fax: +90-288-2140516; e-mail:

[turhancivelek@klu.edu.tr](mailto:turhancivelek@klu.edu.tr)

## 1. INTRODUCTION

Social computing is a new and developing paradigm, which includes modeling and analysis of social behaviors [1]. It is defined as a knowledge and communication technique design and usage tool as well as a tool for calculation simplification of human social dynamics and works placing social content in focus [2]. It produces results and applications for intelligent and interactive practices of multi-disciplinary approaches by analyzing and modeling various data from media and social platforms. It supports various areas such as human-computer interaction, computer, sociology, social psychology, and organization theory [3].

Social computing, as it is introduced, as a new concept based on artificial systems, is advancing beyond processing of just social data but towards social intelligence such as artificial intelligence [4, 5]. Computer simulations, using methods such as artificial intelligence, complex statistical methods, analytical approaches and evolutionary algorithms model social behaviors [6].

Social computing encompassing calculation paradigms and technology applications, helps scientists in evaluation of individual and organizational behavior and the management and implementation of emergency situations [7]. The social data processing is composed of modeling a community with artificial systems, analyses and evaluation using computational tools, management and control of a real community using parallel execution.

Similar studies in different areas, such as in socio-economic systems [8], e-commerce [9], emergency rescues [10], operations management against the risk of environmental accidents [11], determination of amount of passengers at stations in real time [12], safety efficiency in rail transport systems [13], personal and social group behaviors, social networking sites [14, 15, 16, 17] have been reported previously.

Machine learning techniques can effectively be used in social process modeling and decision-making [18, 19, 20, 21]. It evaluates the data and performed improvements in decision-making in, among others, medical diagnostics, image and face recognition, signal processing, optimization of network, artificial intelligence, robotics and psychology [22]. Machine learning algorithms can be used for reporting individual and social behavior, which constitutes one supporting point of the computational analysis and evaluation process based on social data processing. Machine learning is preferred in development of computer learning techniques, and

production of new solutions based on analysis of the data stacks of past learning information [23].

J. Ross Quinlan developed renewable J48 algorithm, based on information gain theory. It is a decision tree algorithm, which has C4.5 algorithms in the background. It is one of the best algorithms, which performs the best learning from the samples [24, 25]. The fundamentals of it are placed on divide and conquer rule. It constructs a decision tree by dividing and choosing related samples using IF-THEN conditions [26]. J48 algorithm produces membership function sets output and decision tree interfaces by dividing samples from the point where information gain, according to IF-THEN rule, is the best. Decision trees are tools that facilitate understanding sampled data, support decision-making and have influential accuracy for graphical presentation [23]. Data is divided after selecting its best parameter in the data domain. Decision tree is structured top-down, beginning from the best root parameter.

J48 algorithm can effectively prune meaningless branches. The reason for this is that the decision tree does not explore data but it creates a simple classification model of them. Furthermore, decision trees prevent finding more quality rules because they use only heuristic search. They follow solely a single path and thereby miss alternatives including better rules. This paper intends to remedy this through proposing a decision tree algorithm to explore patterns of useful business intelligence that it is made by a high-profit-divide method as in [27].

## **2. DATA and METHOD of ANALYSIS**

This research was carried out to identify approaches of high school students' attitudes in connection with the social media usage and to their loneliness [28]. Two surveys used questionnaires with 23 and 20 different questions that were handed over in random sample to 537 high school students in Istanbul. Obtained data from the survey were transformed to .arff format and analyzed by using WEKA 3.7.12 (Waikato Environment for Knowledge Analysis) which is a popular suite of machine learning software. It contains a collection of visualization tools and algorithms for data analysis and predictive modeling with graphical user interfaces for easy access to these functions [29, 30]. J48 and ZeroR classification algorithms from the WEKA library evaluated the data from the surveys. In this endeavor, the success rate of each questionnaire item by algorithms performed-classification was targeted. The machine-learning

algorithm J48 performed the most success in the respond of “*I do not allocate enough time to the other social activities because of social media sites*”

It is desired to know the success rates of machine learning algorithms in the analysis they are used. Accuracy rate, precision, recall and F-measure are used to compare success rates of the algorithms [31]. The class of data is predicted true or wrong when evaluated by a classification algorithm. WEKA produces a confusion matrix which is a digital output summary of made predictions.

*Accuracy rate* is used to measure model performance. It is the ratio of correctly classified samples number (TP +TN) to total number of samples (TP+TN+FP+FN).

$$\text{Accuracy rate} = \frac{(TP + TN)}{(TP + FP + FN + TN)} \quad (1)$$

*Error Rate* is the complementary part, which completes the accuracy rate to 1. It is the ratio of incorrectly classified number samples (FP+FN) to total number of samples (TP+TN+FP+FN).

$$\text{Error Rate} = \frac{(FP + FN)}{(TP + FP + FN + TN)} \quad (2)$$

*Precision* is the radio of true positive samples number (TP) whose class is estimated to be 1 to total samples number (TP+FP) whose class is estimated to be 1.

$$\text{Precision (P)} = \frac{TP}{(TP + FP)} \quad (3)$$

*Recall* is the ratio of the correctly classified positive samples number to total positive samples number (TP+FN).



$$\text{Recall } (R) = \frac{TP}{(TP + FN)} \quad (4)$$

Precision and recall are not enough alone to extract meaningful results in inter-observer comparisons. *F-measure*, which is harmonic average of precision and recall, is defined to solve this problem [32]. The output of F-measure value has better learnt the relationship between algorithm classes that are close to 1. F-measure is calculated as follows:

$$\text{F-measure } (F) = \frac{2DK}{(D + K)} \quad (5)$$

*Kappa value* (K) determines the concurrence reliability of comparison between observers [33, 34]. The interpretable interval of Kappa-value is between -1 and 1. K is 1 when there is an exact concurrence comparison between observers. Negative values of kappa ( $K < 0$ ) are meaningless in terms of reliability. The range of 0.41 and 1.0 is acceptable value for K [35]. If  $P_o$  is acceptable rate and  $P_c$  is the expected rate, K is calculated as follows:

$$\text{Kappa value } (K) = \frac{(P_o - P_c)}{(1 - P_c)} \quad (6)$$

### 3. FINDINGS

In Table 1, While 329 ((%61.27) of 537 samples were classified as true with ZeroR primitive algorithm, 208 (%38.73) of them were classified as false in WEKA evaluation as shown in Table 2. Kappa Statistic value was 0. While 385 (%71.69) of 537 samples were classified as true with J48 classification algorithm, 152 (%28.31) of them were classified as false. Kappa Statistic value was 0.446.

**Table 1** Confusion Matrix (J48 and ZeroR)

J48 Confusion Matrix					ZeroR Confusion Matrix				
a	b	c	←classified as		a	b	c	←classified as	
290	17	22	I	a=1	329	0	0	I	a=1
36	21	21	I	b=2	78	0	0	I	b=2
44	12	74	I	c=3	130	0	0	I	c=3

The true classification number of J48 algorithm is bigger than true classification number of ZeroR algorithm. This indicates that J48 algorithm accomplishes learning. If J48 kappa Statistic value (0.45) is between 0.41 and 0.60, the success of learning of J48 algorithm is moderate and acceptable [36].

**Table 2** Results of Analyzing Survey Data with WEKA Program

Tipi	TP Rate	FP Rate	Precision	Recall	F-Measure	ROC Area
J48	0.717	0.270	0.694	0.717	0.701	0.800
ZeroR	0.613	0.613	0.375	0.613	0.466	0.495

In Table 2, It is seen that  $F(J48) > F(ZeroR)$  in Table 3. The more F-Measure value of J48 algorithm is close to 1 the more successful machine learning is. Analysis of survey data by WEKA proves that, J48 algorithm makes the best learning. The decision tree in Fig. 1 was obtained according to learning style, which was realized by J48 algorithm in WEKA program.

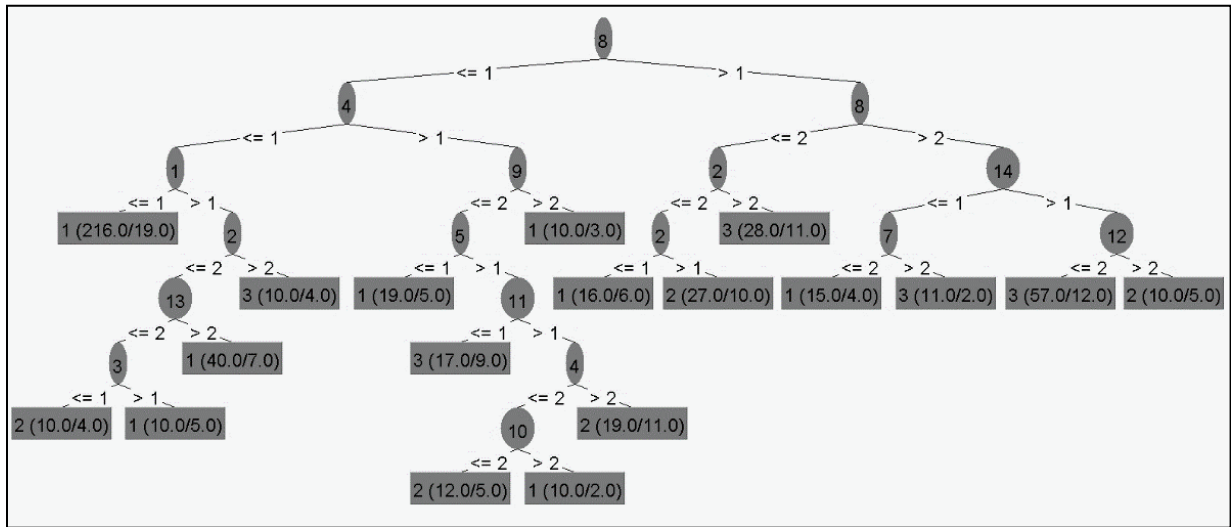


Figure 1 J48 Decision Tree

The machine learning algorithm J48 was used and the basic question, “*I do not allocate enough time to the other social activities because of social media sites*” was asked to the participants to determine whether learning took place or not. Learning took place successfully for the following 14 expressions in 43 based on the learning questions. They were:

1. I feel I gain a new personality by means of social media sites,
2. I think the social media sites break off me from my family,
3. I think I get rid of loneliness by means of social media sites,
4. I do not allocate enough time to my family because of social media sites,
5. I like the spread of my social media messages among friends,
6. I do not allocate enough time to the other social activities because of social media sites,
7. I express my feelings more to the friends of mine to whom I have special interests comfortably by the agency of social media sites,
8. I do not allocate enough time to my friends because of social media sites,
9. I do not have anybody who can help,
10. I have very many things in common with people around me,
11. I can find friends when I want,
12. I am unhappy due to the fact that I am withdrawn into my shell to such a high degree,
13. I have people to whom I can talk,

14. I have people to whom I can tell my concerns.

The algorithm made a simple classification of the data set. It divided the data by choosing the best root variable, and built the decision tree from top to down.

The best root variable was placed to top, and according to gain condition, other root variables were aligned downwards. Therefore, the graphical presentation of the decision tree created with high accuracy as shown in Figure 1. Decision tree, built as explained above, begins by choosing the best root variable and data. Attributes are established as points of nodes, and leaves, thus produced class labels.

The question of if social media users allocated enough time to social activities was investigated using machine learning performed by J48 algorithm in WEKA. J48 accomplished high degree of learning for question 8. Using social media consumers, that machine learning of J48 algorithms was accomplished regarding the answer, *'I can't spare enough time for other activities because of social media sites'* of persons who allocated enough time to their friends;

- Two hundred sixty-four (%49.2) persons allocated time to social activities. From others seventy-one persons did not allocate time for social activities,
- Thirty-two (%6) persons occasionally allocated time or did not allocate time their families allocated time social activities,
- Of persons who allocated time for their families within persons who allocated time for their friends;
  - Two hundred thirty-five (%43.8) persons allocated time for social activities,
  - One hundred ninety-seven (%36.7) persons, who did not acquire new personality, allocated time for social activities,
  - Thirty-three persons (%6.1) of those who acquired new personality and considered themselves that they were not detached from their families or felt sometimes that they were and they had persons in their contact circles to talk declared that they allocated time for social activities.
- Of persons who did not spare time for their friends but had people around or occasionally had people around with whom they could talk about their concerns,
  - Fifty (%9.3) persons occasionally allocated time or did not allocate time for social activities,

- Forty-five (%8.4) persons who were occasionally unhappy or were unhappy, due to have been closed to outer world, did not allocate time for social activities, have been learnt by the J48 algorithm correctly.

#### 4. DISCUSSION and RESULTS

In this study, individual effects of social media on media users were evaluated, and social attitudes of social media users were characterized by machine learning. The findings obtained here supported previous studies which were carried out by Macy & Willer (2002) and those by Mao & Wang (2012). The result of data analysis of the survey with WEKA program proved that J48 algorithm made the best learning and a decision tree was obtained as function of learning styles by J48 algorithm in WEKA program.

It was observed that those of social media users who allocated time for their families allocated time their friends as well. J48 algorithm performed best extraction based on the best root variable and presented it graphically. Results and the presentation of decision tree based sports activities supported pervious analogous studies which reported by Sadeh, Hong, Cranor, Fette, Kelley, Prabaker, Rao, Danezis (2009).

On the whole, the WEKA analysis accomplished learning correctly regarding the fact that 290 (%54) persons allocated time for social activities, 21 persons (%13.78) allocated occasionally and that 74 (%13.78) persons did not allocate time. It did not obtain learning about the social activity period of 152 (%28.31) persons.

Social-oriented data processed by machine learning evaluation can support related research. They can develop strategies with the guidance of gains and outputs based on individuals and organizations which they reported by King, Li, & Chan, (2009). Statistical values and decision trees' graphical interfaces can support decision-making processes about social computing. Obtained results supported pervious analogous studies which reported by Fang &Lefevre (2010), Xie, Knijnenburg & Jin (2014). As it is done in this research, machine-learning algorithms can be used in computational analysis and evaluation, which constitutes one part of the social data processing, to analyze and document behaviors of individuals and groups.

## REFERENCES

- [1] F.-Y. Wang, «Toward a paradigm shift in social computing: The acp approach,» *cilt 22*, no. 5, pp. 65-67, 2007.
- [2] F.-Y. Wang, D. Zeng, K. M. Carley ve W. Mao, «Social computing: From social informatics to social intelligence,» *IEEE Intelligent Systems*, cilt 22, no. 2, pp. 79-83, 2007.
- [3] I. King, J. Li ve K. T. Chan, «A Brief Survey of Computational Approaches in Social Computing,» *IJCNN'09 Proceedings of the 2009 international joint conference on Neural Networks*, NJ,USA, 2009.
- [4] F.-Y. Wang, «Computational theory and method on complex system,» *China Basic Science*, cilt 6, no. 5, p. 3–10, 2004.
- [5] F.-Y. Wang ve S. T. Tang, «Artificial societies for integrated and sustainable development of metropolitan systems,» *IEEE Intelligent Systems*, cilt 19, no. 4, pp. 82-87, 2004.
- [6] M. W. Macy ve R. Willer, «From Factors to Actors: Computational Sociology and Agent-Based Modeling,» *Annual Review of Sociology*, no. 28, pp. 143-166, 2002.
- [7] W. Mao ve F. Wang , *Advances in Intelligence and Security Informatics*, Oxford, UK: Academic Press, 2012.
- [8] D. Wen, Y. Yuan ve X. R. Li, «Artificial Societies, Computational Experiments, and Parallel Systems: An Investigation on a Computational Theory for Complex Socioeconomic Systems,» *IEEE Transactions on Services Computing*, cilt 6, no. 2, pp. 177-185, 2015.
- [9] F. -y. Wang, D. -j. Zeng ve Y. Yuan, «An ACP-based Approach for Complexity Analysis of E-commerce System,» *Complex Systems and Complexity Science*, cilt 5, no. 3, pp. 1-8, 2008.
- [10] J. Sifeng, X. Gang, F. Dong ve H. Chunpeng, «Study on the emergency rescue decision support system of petrochemical plant based on ACP theory,» *in Proceedings of the 6th Management Annual Meeting*, 2011.
- [11] G. Xiong, X. Dong, D. Fan ve F. Zhu, «Parallel Bus Rapid Transit (BRT) operation management system based on ACP approach,» *Networking, Sensing and Control (ICNSC), 2012 9th IEEE International Conference on*, 2012.
- [12] B. Ning, F.-y. Wang, H.-r. Dong , R.-m. Li, D. Wen ve L. Li, «Parallel Systems for Urban Rail Transportation Based on ACP Approach,» *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, cilt 10, no. 6, pp. 23-28, 2010.
- [13] F. -Y. Wang, J. Zhao ve S. -X. Lun, «Artificial power systems for the operation and management of complex power grids,» *Southern Power System Technology*, cilt 2, no. 3, pp. 1-11, 2008.
- [14] P. Singla ve M. Richardson, «Yes, There is a Correlation From Social Networks to Personal Behavior on the Web,» *WWW '08 Proceedings of the 17th international conference on World Wide Web*, New York, 2008.
- [15] B. He, C. Macdonald ve I. Ounis, «Ranking opinionated blog posts using opinionfinder,» *SIGIR '08 Proceedings of the 31st annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information*, New York, 2008.

- [16] A. Sun, M. Hu ve E. -P. Lim, «Searching blogs and news: a study on popular queries,» *SIGIR '08 Proceedings of the 31st annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval*, New York, 2008.
- [17] J. L. Elsas, J. Arguello, C. Jamie ve J. G. Carbonell, «Retrieval and feedback models for blog feed search,» *SIGIR '08 Proceedings of the 31st annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval*, New York, 2008.
- [18] N. Sadeh, J. Hong, L. Cranor, I. Fette, P. Kelley, M. Prabaker ve J. Rao, «Understanding and capturing people's privacy policies in a mobile social networking application,» *Personal and Ubiquitous Computing. Springer*, cilt 13, no. 6, pp. 401-412, 2009.
- [19] G. Danezis, «Inferring privacy policies for social networking services,» *AISec '09 Proceedings of the 2nd ACM workshop on Security and artificial intelligence*, New York, 2009.
- [20] L. Fang ve K. LeFevre, «Privacy wizards for social networking sites,» *WWW '10 Proceedings of the 19th international conference on World wide web*, New York, 2010.
- [21] J. Xie, B. P. Knijnenburg ve H. Jin, «Location sharing privacy preference: analysis and personalized recommendation,» *IUI '14 Proceedings of the 19th international conference on Intelligent User Interfaces*, New York, 2014.
- [22] E. Alpaydin, «Introduction to Machine Learning,» *Introduction to Machine Learning*, USA, Barnes&Noble, 2004, pp. 350-368.
- [23] D. -A. SITAR-TĂUT ve A. -V. SITAR-TĂUT, «Overview on How Data Mining Tools May Support Cardiovascular Disease,» *Journal of Applied Computer Science & Mathematics*, cilt 8, no. 4, pp. 57-62, 2010.
- [24] L. Gaga, V. S. Moustakis, Y. Vlachakis ve G. Charissis, «ID+: Enhancing medical knowledge acquisition with machine learning,» *dx.doi.org*, cilt 10, no. 2, pp. 79-94, 1996.
- [25] J. R. QUINLAN, «Induction of Decision Trees, Machine Learning,» *Kluwer Academic Publishers*, cilt 1, pp. 81-106, 1986.
- [26] K. Mollazade, H. Ahmadi, M. Omid ve R. Alimardani, «An Intelligent Combined Method Based on Power Spectral Density, Decision Trees and Fuzzy Logic for Hydraulic Pumps Fault Diagnosis,» *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, cilt 2, no. 8, p. 986, 2008.
- [27] J. Li, A. W. Fu ve P. Fahey, «Efficient discovery of risk patterns in medical data,» *Efficient discovery of risk patterns in medical data, Elsevier*, cilt 45, no. 1, pp. 77-89, 2009.
- [28] F. S. Argin, *Ortaokul ve Lise Öğrencilerinin Sosyal Medyaya İlişkin Tutumlarının İncelenmesi*, İstanbul: Yeditepe Üniversitesi, 2013.
- [29] L. H. Witten, E. Frank ve M. A. Hall, *Data mining: practical machine learning tools and techniques*, New York: Morgan Kaufmann. Elsevier., 2011.
- [30] «<http://www.cs.waikato.ac.nz/ml/weka/>,» 20 Aralık 2015. Available: <http://www.cs.waikato.ac.nz/ml/weka/>.
- [31] E. K. Aydoğan, C. Gencer ve S. Akbulut, «Churn Analysis And Customer Segmentation Of A Cosmetics Brand Using Data Mining Techniques,» *Journal of Engineering and Natural Sciences*, cilt 26, no. 1, pp. 42-56, 2008.

- [32] J. Han ve M. Kamber, *Data Mining Concepts and Techniques*, Francisco, CA: Morgan Kaufmann, Elsevier inc, 2006.
- [33] J. Cohen, «A Coefficient of Agreement For Nominal Scales,» *Educational and Psychological Measurement*, cilt 20, pp. 37-46, 1960.
- [34] J. . L. Fleiss, «Measuring nominal scale agreement among many raters,» *Psychological Bulletin*, cilt 76, no. 5, pp. 378-382, 1971.
- [35] J. R. Landis ve G. G. Koch , «The measurement of observer agreement for categorical data,» *PubMed* , cilt 33, no. 1, pp. 159-74, 1977.
- [36] P. Brennan ve A. J. Silman, «Statistical Methods for Assessing Observer Variability in Clinical Measures,» *BMJ Clinical Research*, cilt 304, no. 6840, pp. 1491-4, 1992.



# ON CURVES OF CONSTANT WIDTH DUE TO THE BISHOP FRAME OF TYPE-2 IN DUAL EUCLIDEAN SPACE $D^3$

Yasin ÜNLÜTÜRK

*Department of Mathematics, Kırklareli University, Kırklareli, 39100, Turkey*

## Abstract

In this work, we study dual constant width curves due to the Bishop frame of type-2 in dual space  $D^3$ . We obtain a differential equation which characterizes these curves in  $D^3$ . For special solutions of this differential equation system, we obtain some results in  $D^3$ .

**Keywords:** Dual curves, dual constant width curves, dual Bishop frame of type-2, dual Euclidean space.

**MSC (2010):** 53B30, 53A35

## $D^3$ DUAL ÖKLİDYEN UZAYDA 2. ÇEŞİT BISHOP ÇATISINA GÖRE SABİT GENİŞLİKLİ DUAL EĞRİLER

## Özet

Bu çalışmada,  $D^3$  dual Öklid uzayında 2. tip dual Bishop çatısına göre sabit genişlikli dual eğrileri inceliyoruz.  $D^3$  de bu tip eğrileri karakterize eden bir diferensiyel denklem elde ediyoruz.  $D^3$  de bu diferensiyel denklem sisteminin çözümü için, bazı sonuçlar elde ediyoruz.

**Anahtar Kelimeler:** Dual eğriler, Sabit genişlikli dual eğriler, 2. tip dual Bishop çatısı, Dual Öklid uzayı

Sorumlu Yazar: Yasin ÜNLÜTÜRK, e-posta: [yasinunluturk@klu.edu.tr](mailto:yasinunluturk@klu.edu.tr)

## 1. INTRODUCTION

The introduction of dual numbers were proposed by William Kingdon Clifford as the results of his geometrical researches. Then dual numbers and vectors had been used on line geometry and kinematics by Eduard Study. Some special curves have been studied in Euclidean space and its ambient spaces such as Lorentzian, and Galilean spaces, (see [2], [6], [7], [9]).

Fujivara obtained the solution of problem determining whether or not constant width curves are possible for space curves, and he define the concept “width” of space curves on a constant width surface, (see [2], [3], [4], [5], [10], [11], [12], [13], [14], [15]).

It is also observed that special curves such as spherical curves, Bertrand curves, spherical indicatrices, curves of constant breadth, involutes and evolutes are studied by obtaining solutions of special differential equations characterizing them, (see, [5], [6], [7], [9], [12]). Such curves have been intensively researched, for details (see, [5], [6], [12]).

Bishop frame put forward as alternative frame of curves had been offered by L.R. Bishop in 1975 by using parallel transporting vector fields, see, [1]. Later, there are lots of papers concerning this concept of frame. In general sense, for the researches in Euclidean and Minkowski spaces, one can look at [1], [8], and also for the treatises in dual space, see, [9].

In this paper, using the vector fields known as dual tangent, normal, and binormal vectors of Frenet-Serret frame, we give dual Bishop frame of type-2 of regular dual curves in  $D^3$ . Thereafter we characterize dual constant width curves due to the mentioned frame in  $D^3$ . We also give some properties of dual constant width curves due to that frame in  $D^3$ .

## 2. PRELIMINARIES

Let  $E^3$  be 3-dimensional Euclidean space, that is, 3-dimensional real vector space  $E^3$  with the metric

$$\langle dx, dx \rangle = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

where  $(x_1, x_2, x_3)$  denotes the canonical coordinates in  $E^3$ . An arbitrary vector  $x$  of  $E^3$  is said to be  $\langle x, x \rangle > 0$  or  $x = 0$ . For  $x \in E^3$  the norm is defined by  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  where the vector  $x$  is called a positive definite.

Dual numbers are given by the set

$$D = \left\{ \hat{x} = x + \varepsilon x^* \mid x, x^* \in E \right\},$$

where the symbol  $\varepsilon$  designates the dual unit with the property  $\varepsilon^k = 0$  for  $\varepsilon \neq 0$ . Dual angle is defined as  $\hat{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ , where  $\theta$  is the projected angle between two spears and  $\theta^*$  is the shortest distance between them. The set  $D$  is a commutative ring under the operations  $(+)$  and  $(\cdot)$  [7].

The set

$$D^3 = D \times D \times D = \left\{ \hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G} + \varepsilon\mathcal{G}^* \mid \mathcal{G}, \mathcal{G}^* \in E^3 \right\}$$

is a module over the ring  $D$  [7].

For any dual vectors  $\hat{a} = a + \varepsilon a^*$ ,  $\hat{b} = b + \varepsilon b^* \in D^3$  the Euclidean inner product of  $\hat{a}$  and  $\hat{b}$  is defined by

$$\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle = \langle a, b \rangle + \varepsilon (\langle a^*, b \rangle + \langle a, b^* \rangle),$$

thus the dual Euclidean space is the dual space  $D^3$  together with Euclidean inner product, and denoted by  $D^3$ , and also for  $\hat{\mathcal{G}} \neq 0$  the norm is defined as

$$\|\hat{\mathcal{G}}\| = \sqrt{\langle \hat{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{G}} \rangle}.$$

### 3. MAIN RESULT

In this section, we study constant width curves due to dual Bishop frame of type-2 in  $D^3$ . It is also shown that dual curves of constant width are dual slant helix in some special cases due to dual Bishop frame of type-2 in  $D^3$ .

Let  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(s)$  be a dual unit speed regular curve in  $D^3$ . The dual Bishop frame of type-2

formula of the dual curve  $\hat{\alpha}(s)$  is defined by

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_1' \\ \hat{\xi}_2' \\ \hat{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\hat{\epsilon}_1 \\ 0 & 0 & -\hat{\epsilon}_2 \\ \hat{\epsilon}_1 & \hat{\epsilon}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \\ \hat{B} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

The relation matrix between dual Frenet frame and dual Bishop frame of type-2 is given as

$$\begin{bmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \hat{\theta}(s) & -\cos \hat{\theta}(s) & 0 \\ \cos \hat{\theta}(s) & \sin \hat{\theta}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \\ \hat{B} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

here, the dual Bishop curvatures of type-2 are given by

$$\hat{\epsilon}_1(s) = -\hat{\tau} \cos \hat{\theta}(s), \quad \hat{\epsilon}_2(s) = -\hat{\tau} \sin \hat{\theta}(s), \quad (3)$$

where  $\hat{\tau}$  is dual Frenet torsion. Also it can be deduced that dual Frenet curvature is as follows

$$\hat{\theta}' = \hat{\kappa} = \frac{\left(\frac{\hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_1}\right)'}{\epsilon_1 + \left(\frac{\hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_1}\right)^2} \quad (4)$$

in terms of dual Bishop curvature of type-2.

The frame  $\{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{B}\}$  is properly oriented, and the dual angle is also

$$\hat{\theta}(s) = \int_0^s \hat{\kappa}(s) ds.$$

**Definition 3.1.** Let  $(\hat{C}_1)$  be a dual curve due to dual Bishop frame of type-2 in  $D^3$ . If  $(\hat{C}_1)$  has parallel tangents in the reverse directions at the corresponding points  $\hat{\alpha}(s)$  and  $\hat{\alpha}^*(s^*)$  and the distance between the points remains always constant, then  $(\hat{C}_1)$  is said to be a dual constant width curve due to dual Bishop frame of type-2 in  $D^3$ .

A simple closed dual constant width curve is represented due to dual Bishop frame of type-2 in  $D^3$  can be written as

$$\hat{\alpha}^*(s^*) = \hat{\alpha}(s) + \hat{m}_1(s) \hat{\xi}_1(s) + \hat{m}_2(s) \hat{\xi}_2(s) + \hat{m}_3 \hat{B}, \quad (5)$$

where  $\hat{m}_1(s), \hat{m}_2(s), \hat{m}_3$  are arbitrary functions of  $s$ . Differentiating (5) gives

$$\hat{\xi}_1^* \frac{ds^*}{ds} = (1 + \hat{m}_1' + \hat{\epsilon}_1 \hat{m}_3) \hat{\xi}_1 + (\hat{m}_2' + \hat{\epsilon}_2 \hat{m}_3) \hat{\xi}_2 + (-\hat{\epsilon}_1 \hat{m}_1 - \hat{\epsilon}_2 \hat{m}_2 + \hat{m}_3') \hat{B}. \quad (6)$$

Considering  $\hat{T}^* = -\hat{T}$  by Definition 3.1, we obtain the system of differential equations as follows

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{m}_1}{ds} &= -\frac{ds^*}{ds} - \hat{m}_3 \hat{\epsilon}_1 - 1, \\ \frac{d\hat{m}_2}{ds} &= -\hat{\epsilon}_2 \hat{m}_3, \\ \frac{d\hat{m}_3}{ds} &= \hat{\epsilon}_1 \hat{m}_1 + \hat{\epsilon}_2 \hat{m}_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Let us denote the angle between the tangent of curve at the point  $\hat{\alpha}(s)$  and a given direction as  $\hat{\varphi}$ , and also take

$$\hat{\theta} = \hat{\kappa} = \frac{\hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_1}, \quad \text{and} \quad \hat{\theta}^* = \hat{\kappa}^* = \frac{\hat{\epsilon}_2^*}{\hat{\epsilon}_1^*}$$

into consideration, the equation (7) turns into

$$\begin{aligned} \frac{d \hat{m}_1}{d \hat{\varphi}} &= -f(\hat{\varphi}) - \hat{\epsilon}_1 \hat{\rho} \hat{m}_3, \\ \frac{d \hat{m}_2}{d \hat{\varphi}} &= -\hat{\epsilon}_2 \hat{\rho} \hat{m}_3, \\ \frac{d \hat{m}_3}{d \hat{\varphi}} &= \hat{\epsilon}_1 \hat{\rho} \hat{m}_1 + \hat{\epsilon}_2 \hat{\rho} \hat{m}_2, \end{aligned} \quad (8)$$

where  $f(\hat{\varphi}) = \hat{\rho} + \hat{\rho}^*$ ;  $\hat{\rho} = \frac{1}{\hat{\kappa}}$ ,  $\hat{\rho}^* = \frac{1}{\hat{\kappa}^*}$ .

Using  $\hat{\rho} = \frac{1}{\hat{\kappa}}$  and the system (8) we obtain the dual differential equation of third order as follows

$$\frac{d^3 \hat{m}_1}{d \hat{\varphi}^3} = -f''(\hat{\varphi}) + \left\{ -\hat{\epsilon}_1 \hat{\rho} - 2(\hat{\epsilon}_1 \hat{\rho})' \right\} \hat{m}_3 - 2(\hat{\epsilon}_1 \hat{\rho})' \hat{m}_3'. \quad (9)$$

**Corollary 3.1.** The third order differential equation in (9) is a characterization of the simple closed curve  $\hat{\alpha}$  due to dual Bishop frame of type-2 in  $D^3$ .

Since position vector of a simple closed curve is determined by solution of (9), let us examine the solution of the equation (9) within the special cases as follows. Let  $\hat{\epsilon}_1$  and  $f(\hat{\varphi})$  be a constants, then the equation (9) has the form

$$\frac{d^3 \hat{m}_1}{d \hat{\varphi}^3} = 0. \quad (10)$$

Solution of equation (10) yields the components

$$\begin{aligned} \hat{m}_1 &= \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \hat{\varphi} + \hat{A}_3 \hat{\varphi}^2, \\ \hat{m}_2 &= \int \frac{\hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_1} \frac{d}{d \hat{\varphi}} (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 \hat{\varphi} + \hat{A}_3 \hat{\varphi}^2) d \hat{\varphi}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\hat{m}_3 = \left[ \frac{d}{d\hat{\varphi}} (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 \hat{\varphi} + \hat{A}_3 \hat{\varphi}^2) + f(\hat{\varphi}) \right] \cdot \frac{-1}{\hat{\epsilon}_1 \hat{\rho}},$$

where  $\hat{A}_1$ ,  $\hat{A}_2$ , and  $\hat{A}_3$  are constant dual numbers.

**Corollary 3.2.** The position vector of a simple closed dual constant width curve with constant curvature and constant torsion is found as

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^*(s^*) &= \hat{\alpha}(s) + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 \hat{\varphi}(s) + \hat{A}_3 \hat{\varphi}^2(s)) \hat{\xi}_1(s) + \left( \int \frac{\hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_1} \frac{d}{d\hat{\varphi}} (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 \hat{\varphi} + \hat{A}_3 \hat{\varphi}^2) d\hat{\varphi} \right) \hat{\xi}_2(s) \\ &\quad + \left[ \frac{d}{d\hat{\varphi}} (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 \hat{\varphi} + \hat{A}_3 \hat{\varphi}^2) + f(\hat{\varphi}) \right] \cdot \frac{-1}{\hat{\epsilon}_1 \hat{\rho}} \hat{B} \end{aligned}$$

in terms of the values of  $\hat{m}_1$ ,  $\hat{m}_2$ , and  $\hat{m}_3$  in the equation (11).

Given the distance between opposite points of  $\hat{\alpha}^*$ ,  $\hat{\alpha}$  be constant, then we can write that

$$\left\| \hat{\alpha}^* - \hat{\alpha} \right\| = \hat{m}_1^2 + \hat{m}_2^2 + \hat{m}_3^2 = \text{constant.} \quad (12)$$

Differentiating (12) with respect to  $\hat{\varphi}$

$$\hat{m}_1 \frac{d\hat{m}_1}{d\hat{\varphi}} + \hat{m}_2 \frac{d\hat{m}_2}{d\hat{\varphi}} + \hat{m}_3 \frac{d\hat{m}_3}{d\hat{\varphi}} = 0. \quad (13)$$

By virtue of (8), the differential equation (14) yields

$$\hat{m}_1 \left( \frac{d\hat{m}_1}{d\hat{\varphi}} + \hat{m}_3 \hat{\epsilon}_1 \hat{\rho} \right) = 0. \quad (14)$$

There are two cases for the equation (14), so we study these cases as follows :

**Case 1:** If  $\hat{m}_1 = 0$ , then we have the components

$$\hat{m}_2 = \int \left( \frac{\hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_1} f(\hat{\varphi}) \right) d\varphi, \quad \hat{m}_3 = \frac{-f(\hat{\varphi})}{\hat{\epsilon}_1 \hat{\rho}}. \quad (15)$$

Using the values of (15) in (5), we have the invariant of dual curves of constant width as

$$\hat{\alpha}^* = \hat{\alpha} + \left[ \int \left( \frac{\hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_1} f(\hat{\varphi}) d\hat{\varphi} \right) \right] \xi_2 - \frac{f(\hat{\varphi})}{\hat{\epsilon}_1 \hat{\rho}} \xi_3. \quad (16)$$

**Case 2:** If  $\frac{d\hat{m}_1}{d\hat{\varphi}} = -\hat{m}_3 \hat{\epsilon}_1 \hat{\rho}$ , that is,  $f(\hat{\varphi}) = 0$ , then a relation among radii of curvatures is

$$\text{obtained as } \frac{1}{\hat{\kappa}} + \frac{1}{\hat{\kappa}^*} = 0.$$

## REFERENCES

- [1] Bishop, L.R., There is More Than One Way to Frame a Curve, Amer. Math. Monthly 82, 246-251, 1975.
- [2] Blaschke, W., Konvexe Bereiche Gegebener Konstanter Breite und Kleinsten Inhalts. Math. Ann. 76, 504-513, 1915.
- [3] Euler, L., De Curvis Trangularibus, Acta Acad Petropol, 1870.
- [4] Fujivara, M., On Space Curves of Constant Breadth, Tohoku Math. J. 5, 179-184, 1963.
- [5] Köse, Ö., On Space Curves of Constant Breadth, Doğa Turk. J. Math. 10, 1, 11-14, 1986.
- [6] Reuleaux, F., The Kinematics of Machinery, Dover Publications, New York, 1963.
- [7] Veldkamp, G.R., On The Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous Spatial Kinematics, Mech. Math. Theory, 11, 141-156, 1976.
- [8] Yılmaz, S., Turgut, M., A New version of Bishop Frame and Application to Spherical Images, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 371, 764-776, 2010.
- [9] Yılmaz, S., Savcı, Ü.Z., Dual Curves of Constant Breadth According to Bishop Frame in Dual Euclidean Space, Mathematical Sciences Letters, 1, 1-4, 2016.



- [10] Yılmaz, S., Savcı, Ü.Z., and Ünlütürk, Y., On Dual Spacelike Curves Of Constant Breadth In Dual Lorentzian Space  $D^3$ , *New Trends In Mathematical Sciences*, 3, 4, 164–170, 2015.
- [11] Yılmaz, S., Savcı, Ü.Z., and Ünlütürk, Y., Spacelike Curves of Constant Breadth According to Bishop Frame in Minkowski 3-space, *International J. Math. Combin.*, 4, 4, 1–6, 2014.
- [12] Mağden, A., Yılmaz, S., On The Curves Of Constant Breadth In Four Dimensional Galilean Space, *International Mathematical Forum*, 9, 25, 229–1236, 2014.
- [13] Yılmaz, S., and Turgut, M., Partially Null Curves of Constant Breadth in Semi-Riemannian Space, *Modern Applied Science*, 3, 3, 60–63, 2009.
- [14] Yılmaz, S., Savcı, Ü.Z., and Turgut, M., Characterizations of curves of constant breadth in Galilean 3-space  $G^3$ , *Journal of Advanced Research in Pure Mathematics*, 6, 1, 19–24, 2014.
- [15] Yılmaz, S., and Turgut, M., On the Time-like Curves of Constant Breadth in Minkowski 3-Space,” *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 3, 34–39, 2008.

## A NOTE ON SPECIAL CURVES IN $E_1^4$

Süha YILMAZ<sup>1\*</sup>, Şuur NİZAMOĞLU<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>*Dokuz Eylül University, Buca Faculty of Education,  
Department of Elementary Mathematics Education  
35150, Buca-İzmir, TURKEY*

### Abstract

This article has consisted of a part of doctorate thesis by Süha Yılmaz [7]. Firstly, Frenet formulas are given in  $E_1^4$ . Later, characterizations of regular and inclined curves are studied in  $E_1^4$ . It has been given that a space-like curve is an inclined curve if and only if the expression

$$\frac{\kappa}{\tau} = A \cosh\left(\int_0^s \sigma ds\right) + B \sinh\left(\int_0^s \sigma ds\right),$$

obtained using harmonic curvature functions in  $E_1^4$ . In addition, it has been observed that a fifth order vectorial differential equation of position vector of a space-like curve in  $E_1^4$  has been satisfied by means of Frenet formulas. Similarly, it has been denoted that a fourth order vectorial differential equation of tangent vector of a space-like curve in  $E_1^4$  has been also verified using Frenet formulas. Moreover, we characterized tangent and trinormal indicatrices with one theorem. Finally, it has been denoted that if and only if spherical indicatrices of space-like curve with time-like trinormal vector are regular curves.

**Keywords:** Inclined curve, harmonic curvature, Frenet formulas, regular curve, space-like curve, time-like curve, spherical indicatrices.

## Özet

Bu makale, Süha Yılmaz'ın doktora tezinin bir kısmını içermektedir [7]. Öncelikle,  $E_1^4$  de Frenet formülleri verilmiştir. Daha sonra, regüler ve inclined eğrilerin karakterizasyonları  $E_1^4$  de incelenmiştir. Ayrıca, space-like bir eğrinin inclined eğri olmasının gerek yeter şartının  $E_1^4$  de harmonik fonksiyonlar kullanılarak elde edilen aşağıdaki koşulu sağlaması olduğu verilmiştir:

$$\frac{\kappa}{\tau} = A \cosh\left(\int_0^s \sigma ds\right) + B \sinh\left(\int_0^s \sigma ds\right)$$

İlaveten,  $E_1^4$  deki space-like bir eğrinin konum vektörüne ait beşinci mertebeden vektörel diferensiyel denklemi, Frenet formülleri aracılığıyla sağlanmıştır. Benzer şekilde,  $E_1^4$  deki space-like bir eğrinin teğet vektörüne ait dördüncü mertebeden vektörel diferensiyel denklemi, Frenet formülleri aracılığıyla doğrulanmıştır. Ayrıca teğet ve trinormal göstergeler bir teoremlerle karakterize edilmiştir. Son olarak, space-like bir eğrinin küresel göstergelerinin regüler eğri olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Inclined eğri, harmonik eğrilik, Frenet formülleri, regüler eğri, space-like eğri, time-like eğri, küresel göstergeler.

\*Sorumlu yazar: Süha Yılmaz<sup>(\*)</sup> [suha.yilmaz@deu.edu.tr](mailto:suha.yilmaz@deu.edu.tr)

## 1. INTRODUCTION and PRELIMINARIES

The classical differential geometry of curves in Euclidean 4-space and higher dimensions is studied by Şemin [5], Gluck [3], and Mağden [8]. Also the studies of curves in Minkowski spaces are seen in the works of Yılmaz [7] and Ekmekçi [1].

In this study, we give some new characterizations of special curves in  $E_1^4$

Let denote  $E_1^4$  Minkowski-4 space, i.e., the manifold Euclidean 4-space  $E^4$  together a flat with the Lorentzian metric  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  of signature  $(+, +, +, -)$  as

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4,$$

where  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  and  $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$  [4]. This metric is symmetric, bi-linear and non-degenerate one.

An arbitrary vector  $a$  in  $E_1^4$  can have one of three Lorentzian causal characters; it can be space-like if  $\langle a, a \rangle > 0$  or time-like if  $\langle a, a \rangle < 0$  and null (light-like) if  $\langle a, a \rangle = 0$ . Similarly, an arbitrary curve  $\alpha = \alpha(s)$  in  $E_1^4$  locally be space-like, time-like or null if all of its velocity vectors  $\alpha'(s)$  are respectively, space-like, time-like or null for each  $s \in I \subset E$ . The vectors  $X, Y$  in  $E_1^4$  are said to be orthogonal if  $\langle X, Y \rangle = 0$ . Recall that the norm of an arbitrary vector  $a \in E_1^4$  is given by  $\|a\| = \sqrt{|\langle a, a \rangle|}$  and that the velocity of the curve  $\alpha(s)$  is given by  $\|\alpha'(s)\|$ . Therefore,  $\alpha(s)$  is a unit speed curve if and only if  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \pm 1$  [6].

The Lorentzian sphere of center  $m = (m_1, m_2, m_3, m_4)$  and radius  $r \in E^+$  in the space  $E_1^4$  defined by  $S_1^3 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in E_1^4 : \langle \alpha - m, \alpha - m \rangle = r^2\}$  [4].

Let  $X = X(s)$  be a space-like or time-like curve with unit speed (arc-length parameterized) in Minkowski space time  $E_1^4$ . The Frenet frame of  $X(s)$  which is shown by  $\overset{u}{T}, \overset{u}{N}, \overset{u}{B}$  and  $\overset{u}{E}$  can be defined as follows:

The vector  $\overset{u}{T}$  which is tangent to the curve  $X(s)$  is obtained as

$$\vec{T} = \frac{d\vec{X}}{ds}, \tag{1.1}$$

and the first curvature function  $\kappa$  which measures the curve deviation from straight line is defined as  $\kappa = \|\vec{T}'\|$ .

The vector  $\vec{N}$  which is called principal normal vector is defined as

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{\kappa}. \tag{1.2}$$

The third, or the binormal vector of the curve is defined as

$$\vec{B} = \frac{\vec{N}' + \kappa\vec{T}}{\|\vec{N}' + \kappa\vec{T}\|}, \tag{1.3}$$

and the second curvature function  $\tau$  which measures the curve deviation from the plane  $\{T, N\}$  is defined as  $\tau = \|\vec{N}' + \kappa\vec{T}\|$ .

The fourth, or the trinormal vector is defined as

$$\vec{E} = \mu(\vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{B}), \tag{1.4}$$

where the exterior product of  $\vec{T}, \vec{N}$ , and  $\vec{B}$  is defined as

$$\vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{B} = - \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & -\vec{e}_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}, \tag{1.5}$$

here, the vectors  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , and  $\vec{e}_4$  are coordinate directions, and the frame vectors are as

$T = (t_1, t_2, t_3), N = (n_1, n_2, n_3), B = (b_1, b_2, b_3)$  in  $E_1^4$ , and also the third curvature function  $\sigma$  which measures the curve deviation from the subspace  $\{T, N, B\}$  is defined as

$$\sigma = \mu(-\vec{B} \frac{d\vec{E}}{ds}) = \mu(\vec{E} \frac{d\vec{B}}{ds}).$$

**Definition 1.1.** Let  $X = X(s)$  be a space-like curve with unit speed, The Frenet formulas of  $X = X(s)$  for any parameter  $s \in I$  are defined as

$$\frac{d\vec{u}T}{ds} = \kappa\vec{u}N, \frac{d\vec{u}N}{ds} = -\kappa\vec{u}T + \tau\vec{u}B, \frac{d\vec{u}B}{ds} = -\tau\vec{u}N + \sigma\vec{u}E, \frac{d\vec{u}E}{ds} = \sigma\vec{u}B, \tag{1.6}$$

or its matrix form is as follows

$$\begin{bmatrix} \vec{u}T' \\ \vec{u}N' \\ \vec{u}B' \\ \vec{u}E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{u}T \\ \vec{u}N \\ \vec{u}B \\ \vec{u}E \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

where  $\vec{u}T, \vec{u}N$ , and  $\vec{u}B$  are space-like vectors and  $\vec{u}E$  timelike vector of the curve  $X = X(s)$ , and also  $\kappa, \tau$ , and  $\sigma$  are, respectively, the first, second, and third curvature functions of the curve  $X = X(s)$ .

**Theorem 1.1.** Let  $X = X(s)$  be an arbitrary parameterized space-like curve of class  $C^5$  in  $E_1^4$ , we have

$$\vec{r}T = \frac{\|\dot{X}\|^2}{\|\dot{X}\|^3}, \vec{r}N = \frac{\|\dot{X}\|^2 \|\ddot{X}\| - (\dot{X} \cdot \ddot{X}) \|\dot{X}\|}{\|\dot{X}\|^4}, \vec{r}B = \mu \dot{E} \wedge \dot{T} \wedge \dot{N}, \text{ and } \vec{r}E = \frac{\dot{T} \wedge \dot{N} \wedge \dot{X}}{\|\dot{T} \wedge \dot{N} \wedge \dot{X}\|}, \tag{1.8}$$

$$\kappa = \frac{\|\|\dot{X}\|^2 \|\ddot{X}\| - (\dot{X} \cdot \ddot{X}) \|\dot{X}\|\| \dot{X}\|}{\|\dot{X}\|^4}, \tau = \frac{\|\dot{T} \wedge \dot{N} \wedge \dot{X}\| \|\dot{X}\|}{\|\dot{X}\|^2 \|\ddot{X}\| - (\dot{X} \cdot \ddot{X}) \|\dot{X}\|}, \sigma = \frac{\dot{X}^{(IV)} \cdot \dot{E}}{\|\dot{T} \wedge \dot{N} \wedge \dot{X}\|}, \tag{1.9}$$

where  $\cdot$  shows the derivative respect to the variable  $t$ .

Also, it is known that the curve  $X = X(s)$  is a regular curve if

$$\|\dot{X}\| \neq 0. \tag{1.10}$$

**Definition 1.2.** Let us consider the space-like curve  $X = X(s)$ . If we transport the tangent, principal normal, and the binormal vector fields to the center  $O$  of the unit hypersphere  $S_1^3$ , and the trinormal vector field to the center  $O$  of the unit hypersphere  $H_0^3$ , then we obtain spherical indicatrices of the curve  $X = X(s)$  [7].

**Theorem 1.2.** [1] Let  $\alpha = \alpha(s)$  be a regular curve with curvatures  $\kappa \neq 0, \tau \neq 0, \sigma \neq 0$  in  $E_1^4$ .

The curve  $\alpha$  is an inclined curve if and only if

$$H_1^2 - H_2^2 = \text{const.}, \quad (1.11)$$

where  $H_1$  and  $H_2$  are the harmonic curvatures defined

$$H_1 = \frac{\kappa}{\tau} \text{ and } H_2 = \frac{H_1'}{\sigma}. \quad (1.12)$$

**Theorem 1.3.** Let  $\alpha = \alpha(s)$  be a curve in  $E_1^3$ ,  $\alpha = \alpha(s)$  is an inclined curve if and only if

$$\frac{\kappa}{\tau} = \text{const. for all } s \in I.$$

## 2. MAIN RESULTS

**Theorem 2.1.** Let  $X = X(s)$  be space-like curve with time-like trinormal vector in  $L^4$ . The curve  $X = X(s)$  is an inclined curve if and only if

$$\frac{\kappa}{\tau} = A \operatorname{ch} \left( \int_0^s \sigma ds \right) + B \operatorname{sh} \left( \int_0^s \sigma ds \right),$$

where  $\tau \neq 0, \sigma \neq 0; A, B$  constant.

**Proof.** ( $\Rightarrow$ ): Let the space-like curve  $X = X(s)$  be helix. In this case, from Theorem 1.2,

$$H_1^2 - H_2^2 = \text{constant}. \quad (2.1)$$

Differentiating (2.1) with respect to variable  $s$  we obtain

$$H_1 H_1' - H_2 H_2' = 0, \quad (2.2)$$

Similarly, differentiating deriving of

$$H_2 = \frac{H_1'}{\sigma}, \quad (2.3)$$

we obtain

$$H_2' = \left(\frac{1}{\sigma}\right)' H_1' + \frac{1}{\sigma} H_1'' \quad (2.4)$$

If we use (2.2), (2.3), and (2.4) we obtain

$$\sigma H_1' H_2 - H_2 \left[ \left(\frac{1}{\sigma}\right)' H_1' + \frac{1}{\sigma} H_1'' \right] = 0$$

or

$$H_2 \left[ \sigma H_1 - \left(\frac{1}{\sigma}\right)' H_1' + \frac{1}{\sigma} H_1'' \right] = 0,$$

where  $H_2 \neq 0$  and  $\sigma \neq 0$ . Because if  $\sigma = 0$  and  $H_2 = 0$ , then we get  $H_1' = 0$  and

$H_1 = \frac{\kappa}{\tau} = \text{const}$ . From Theorem 1.3, this shows that the curve is an inclined curve in  $L^3$ , thus

the second-order homogeneous equation with variable coefficient is obtained as follows

$$-\frac{1}{\sigma^2} H_1'' - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma}\right)' H_1' + H_1 = 0. \quad (2.5)$$

If the transformation  $t = \int_0^s \sigma ds$  is applied to  $H_1', H_2''$ , we obtain

$$H_1' = \frac{dH_1}{ds} = \frac{dH_1}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \sigma H_1,$$

$$H_1'' = \frac{d^2 H_1}{ds^2} = \frac{d^2 H_1}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dH_1}{dt} \cdot \frac{d^2 t}{ds^2} = \sigma^2 H_1 + \sigma' H_1,$$

where indicates the derivative with respect to variable  $t$ . Substituting these equations into (2.5) we find

$-H_1 - \frac{\sigma'}{\sigma^2} H_1 + \frac{\sigma'}{\sigma^2} H_1 + H_1 = 0$  therefore we obtain the following differential equation of constant coefficient

$$-H_1 + H_1 = 0. \quad (2.6)$$

From solution of (2.6) we get  $H_1 = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$  or  $H_1 = c_1 (\cosh t + \sinh t) + c_2 (\cosh t - \sinh t)$ ,

if we say  $c_1 + c_2 = A$ ,  $c_1 - c_2 = B$  we obtain  $H_1 = A \cosh t + B \sinh t$  or



$$\frac{\kappa}{\tau} = A \cosh\left(\int_0^s \sigma ds\right) + B \sinh\left(\int_0^s \sigma ds\right)$$

( $\Leftrightarrow$ ): Let's assume that

$$\frac{\kappa}{\tau} = A \cosh\left(\int_0^s \sigma ds\right) + B \sinh\left(\int_0^s \sigma ds\right), \quad (2.7)$$

differentiating (2.7) with respect to variable  $s$  we get

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d}{ds} \frac{\kappa}{\tau} = A \cosh\left(\int_0^s \sigma ds\right) + B \sinh\left(\int_0^s \sigma ds\right), \quad (2.8)$$

similarly, differentiating (2.8) with respect to variable  $s$  gives

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{d}{ds} \frac{\kappa}{\tau} \right] = A \cosh\left(\int_0^s \sigma ds\right) + B \sinh\left(\int_0^s \sigma ds\right) \text{ or } H_2' = \sigma H_1 \text{ and here we obtain}$$

$$H_2' - \sigma H_1 = 0, \quad (2.9)$$

multiplying both side of the expression (2.9) with  $H_2 = \frac{1}{\sigma} H_1'$ , we obtain

$$H_1 H_1' - H_2 H_2' = 0, \quad (2.10)$$

taking the integral of both sides of (2.10), we get

$H_1^2 - H_2^2 = \text{const.}$ , which indicates that the curve is an inclined curve in  $L^4$  from Theorem 1.2.

**Theorem 2.2.** Let  $X : I \rightarrow L^4$  be an arc length parametrized space-like curve from class  $C^4$  such that  $\chi > 0, \sigma > 0$  and  $\sigma = const.$  Then position vector  $X = X(s)$  of the curve satisfies following a vectoral differential equation of 5<sup>th</sup> order

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa^3}{\tau} \cdot \overset{\text{r}}{X}^{(v)} + \left[ \left( \frac{\kappa^3}{\tau} \right)' + \left( \frac{1}{\tau} \right)' \cdot \frac{1}{\kappa} - \frac{2\kappa'}{\tau\kappa^2} - \frac{\sigma^2}{\kappa^\tau} \right] \overset{\text{r}}{X}^{(iv)} \\ & + 2 \left[ \left( \frac{1}{\tau} \right)'' \cdot \frac{1}{\kappa} + \left( \frac{1}{\tau} \right)' \cdot \left( \frac{1}{\kappa} \right)' - 2 \left( \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2} \right)' - \left( \frac{\sigma^2}{\kappa\tau} \right)' - \frac{\kappa''}{\kappa^2} \left( \frac{1}{\tau} \right)' - \frac{\kappa''\kappa^2}{\tau} + 2 \cdot \frac{\kappa'^2}{\kappa^3\tau} + \frac{\kappa}{\tau} + \frac{\tau}{\kappa} - \frac{\sigma^2\kappa'}{\kappa^2\tau} \right] \overset{\text{r}}{X}''' \\ & + \left[ -\frac{\kappa'}{\kappa^2} \left( \frac{1}{\tau} \right)' - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \left( \frac{1}{\tau} \right)'' + \left( \frac{\kappa''\kappa^2}{\tau} \right) + 2 \left( \frac{\kappa'^2}{\kappa^3\tau} \right) + \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)' + \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' - \left( \frac{\sigma^2\kappa'}{\tau\kappa^2} \right)' + \kappa \left( \frac{1}{\tau} \right)' + \frac{\kappa'}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau} \kappa \right] \overset{\text{r}}{X}'' \\ & + \left[ \kappa' \left( \frac{1}{\tau} \right)' + \kappa \left( \frac{1}{\tau} \right)'' + \left( \frac{\kappa'}{\tau} \right)' - \left( \frac{\sigma^2\kappa}{\tau} \right)' \right] \overset{\text{r}}{X}' = 0, \end{aligned}$$

where  $\overset{\text{r}}{T}, \overset{\text{r}}{N}, \overset{\text{r}}{B}$  space-like vectors,  $\overset{\text{r}}{E}$  time-like vector,  $\sigma$  constant.

**Proof.** Suppose  $\overset{\text{r}}{T}, \overset{\text{r}}{N}, \overset{\text{r}}{B}$  are space-like vectors,  $\overset{\text{r}}{E}$  is time-like vector for space-like curve  $X = X(s)$  in  $L^4$  from (1.6)<sub>1</sub> and (1.6)<sub>2</sub> we obtain

$$\overset{\text{r}}{N} = \frac{\overset{\text{r}}{T}'}{\kappa} \tag{2.11}$$

$$\overset{\text{r}}{B} = \frac{1}{\tau} (\kappa \overset{\text{r}}{T} + \overset{\text{r}}{N}') \tag{2.12}$$

Substituting (2.11) in (1.6)<sub>3</sub> we get

$$\overset{\text{r}}{B}' = -\frac{\tau}{\kappa} \overset{\text{r}}{T}' + \sigma \overset{\text{r}}{E} \tag{2.13}$$

differentiating (2.11) and substituting it into (2.12) we find

$$\overset{\text{r}}{B} = \frac{1}{\tau} \left( \kappa \overset{\text{r}}{T} + \left( \frac{\overset{\text{r}}{T}'}{\kappa} \right)' \right) \tag{2.14}$$

taking the integral of both sides of (1.6)<sub>4</sub> we get

$$\frac{1}{E} = \int \sigma B ds \tag{2.15}$$

and substituting (2.14) into (2.15) we obtain

$$\frac{r}{E} = \int \frac{\sigma}{\tau} \left[ \kappa T + \left( \frac{T'}{\kappa} \right)' \right] ds \tag{2.16}$$

and substituting (2.16) into (2.13) we find

$$\frac{r'}{B} = -\frac{\tau}{\kappa} \frac{r'}{T} + \sigma^2 \int \frac{1}{\tau} \left[ \kappa T + \left( \frac{T'}{\kappa} \right)' \right] ds \tag{2.17}$$

similarly differentiating (2.14) and using (2.17) we obtain

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\tau} \right)' \left[ \frac{T'' \kappa - T' \kappa'}{\kappa^2} + \kappa T' \right] + \frac{1}{\tau} \left[ \left( T''' \kappa - T'' \kappa' \right) \kappa^2 - \frac{2\kappa \kappa' \left( T'' \kappa - T' \kappa' \right)}{\kappa^4} + \kappa' T' + \kappa T'' \right] \\ & + \frac{\tau}{\kappa} \frac{r'}{T} - \sigma^2 \int \frac{1}{\tau} \left[ \kappa T + \left( \frac{T'}{\kappa} \right)' \right] ds = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Differentiating (2.18) and substituting

$\mathbb{I} = T, \mathbb{X} = T', \mathbb{X}' = T'', \mathbb{X}'' = T''', \mathbb{X}^{(IV)} = T^{(IV)}, \mathbb{X}^{(V)} = T^{(V)}$  into this expression we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa^3}{\tau} \frac{r'}{X^{(V)}} + \left[ \left( \frac{\kappa^3}{\tau} \right)' + \left( \frac{1}{\tau} \right)' \cdot \frac{1}{\kappa} - \frac{2\kappa'}{\tau \kappa^2} - \frac{\sigma^2}{\kappa \tau} \right] \frac{r'}{X^{(IV)}} \\ & + \left[ \left( \frac{1}{\tau} \right)'' \cdot \frac{1}{\kappa} + \left( \frac{1}{\tau} \right)' \left( \frac{1}{\kappa} \right)' - 2 \left( \frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)' - \left( \frac{\sigma^2}{\kappa \tau} \right)' - \frac{\kappa''}{\kappa^2} \left( \frac{1}{\tau} \right)' - \frac{\kappa'' \kappa^2}{\tau} + 2 \cdot \frac{\kappa'^2}{\kappa^3 \tau} + \frac{\kappa'}{\tau} + \frac{\tau}{\kappa} - \frac{\sigma^2 \kappa'}{\kappa^2 \tau} \right] \frac{r''}{X'''} \\ & + \left[ -\frac{\kappa'}{\kappa^2} \left( \frac{1}{\tau} \right)' - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \left( \frac{1}{\tau} \right)'' + \left( \frac{\kappa'' \kappa^2}{\tau} \right)' + 2 \left( \frac{\kappa'^2}{\kappa^3 \tau} \right) + \left( \frac{\kappa'}{\tau} \right)' + \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' - \left( \frac{\sigma^2 \kappa'}{\tau \kappa^2} \right)' + \kappa \left( \frac{1}{\tau} \right)' + \frac{\kappa'}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau} \kappa \right] \frac{r'''}{X''} \\ & + \left[ \kappa' \left( \frac{1}{\tau} \right)' + \kappa \left( \frac{1}{\tau} \right)'' + \left( \frac{\kappa'}{\tau} \right)' - \left( \frac{\sigma^2 \kappa'}{\tau} \right)' \right] \frac{r'''}{X'} = 0. \end{aligned}$$

Denoting these coefficients of the vectorial differential equation by

$$P(s), Q(s), R(s), K(s), L(s).$$

Respectively, then we can rewrite this last equation as

$$P(s)\overset{1}{X}^{(v)} + Q(s)\overset{1}{X}^{(iv)} + R(s)\overset{1}{X}''' + K(s)\overset{1}{X}'' + L(s)\overset{1}{X}' = 0, \tag{2.19}$$

where

$$P(s) = \frac{\kappa^3}{\tau},$$

$$Q(s) = \left(\frac{\kappa^3}{\tau}\right)' + \left(\frac{1}{\tau}\right)' \cdot \frac{1}{\kappa} - \frac{2\kappa'}{\tau\kappa^2} - \frac{\sigma^2}{\kappa\tau},$$

$$R(s) = \left[\left(\frac{1}{\tau}\right)'' \cdot \frac{1}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau}\right)' \left(\frac{1}{\kappa}\right)' - 2\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' - \left(\frac{\sigma^2}{\kappa\tau}\right)' - \frac{\kappa''}{\kappa^2} \left(\frac{1}{\tau}\right)' - \frac{\kappa''\kappa^2}{\tau} + 2\frac{\kappa'^2}{\kappa^3\tau} + \frac{\kappa}{\tau} + \frac{\tau}{\kappa} - \frac{\sigma^2\kappa'}{\kappa^2\tau}\right],$$

$$K(s) = \left[-\frac{\kappa'}{\kappa^2} \left(\frac{1}{\tau}\right)' - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \left(\frac{1}{\tau}\right)'' + \left(\frac{\kappa''\kappa^2}{\tau}\right)' + 2\left(\frac{\kappa'^2}{\kappa^3\tau}\right) + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' - \left(\frac{\sigma^2\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' + \kappa \left(\frac{1}{\tau}\right)' + \frac{\kappa'}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau} \kappa\right],$$

$$L(s) = \kappa' \left(\frac{1}{\tau}\right)' + \kappa \left(\frac{1}{\tau}\right)'' + \left(\frac{\kappa'}{\tau}\right)' - \left(\frac{\sigma^2\kappa}{\tau}\right)',$$

$\kappa$  is the first curvature,  $\tau$  the second curvature,  $\sigma$  the third curvature and constant.

The equation (2.19) has a solution by Chebyshev-Matrix Method [2]. If  $P(s), Q(s), R(s), K(s)$  and  $L(s)$  are one-variable functions, then these functions satisfy the following conditions:

- i) They must be satisfied by 5th order differential equation .
- ii) They must be formed into Taylor series.

If  $\kappa \neq 0, \tau \neq 0$  in ordinary differential equation (2.19), they can be formed Maclaurin series.

In this situation, the equation (2.19) is transformed to a matrix form with Chebyshev-Matrix Method. Thus, solution of the equation (2.19) can be obtained with an analytic or approximate method.

**Theorem 2.3.** Let  $X = X(s)$  be arc length parametrized space-like curve with time-like trinormal vector from class  $C^4$  in  $L^4$  such that  $\kappa > 0, \tau > 0, \sigma > 0$ . Then tangent vector  $\overset{\perp}{T}$  of  $X = X(s)$  satisfies following a vectoral differential equation of 4<sup>th</sup> order

$$\overset{\perp}{T}^{(iv)} + \left[ \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)' \frac{\tau}{\kappa} + 2 \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\tau} \right| \right]' + \left( \frac{\sigma}{\kappa} \right)' \cdot \frac{1}{\sigma} \right] \overset{\perp}{T}''' + \left[ \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\tau} \right| \right]' \cdot \left( \frac{\sigma}{\kappa} \right)' \cdot \frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma^2}{\kappa} - 1 \right] \overset{\perp}{T}'' + \left[ \left( \frac{\sigma}{\kappa} \right)' \cdot \frac{\tau^2}{\kappa\sigma} - \left( \frac{\tau}{\kappa} \right) \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' - \left( \frac{\sigma}{\kappa} \right)' \cdot \frac{1}{\sigma} - 2 \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\tau} \right| \right]' \right] \overset{\perp}{T}' + \left[ - \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)' \cdot \left( \frac{\tau}{\kappa} \right) - \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\tau} \right| \right]' \cdot \left( \frac{\sigma}{\kappa} \right)' \cdot \frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma^2}{\kappa} \right] \overset{\perp}{T} = 0$$

**Proof.** Suppose  $\overset{\perp}{T}, \overset{\perp}{N}, \overset{\perp}{B}$  are space-like vectors and  $\overset{\perp}{E}$  is a time-like vector, taking the derivative of Frenet formulas (1.6) with respect to arc length parametrized  $s$ , of tangent indicatrix, we obtain

$$\begin{aligned} \overset{\perp}{T}' &= \overset{\perp}{N}, \\ \overset{\perp}{N}' &= -\overset{\perp}{T} + \frac{\tau}{\kappa} \overset{\perp}{B}, \\ \overset{\perp}{B}' &= -\frac{\tau}{\kappa} \overset{\perp}{N} + \frac{\sigma}{\kappa} \overset{\perp}{E}, \\ \overset{\perp}{E}' &= \frac{\sigma}{\kappa} \overset{\perp}{B}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

From (2.20)<sub>2</sub> and (2.20)<sub>3</sub> we get

$$\overset{\perp}{B} = \frac{\kappa}{\tau} (\overset{\perp}{N}' - \overset{\perp}{T}'), \tag{2.21}$$

$$\overset{\perp}{E} = \frac{\tau}{\sigma} \overset{\perp}{N}' + \frac{\kappa}{\sigma} \overset{\perp}{B}', \tag{2.22}$$

And substituting (2.21) into (2.20)<sub>4</sub> we get

$$\overset{\perp}{E}' = \frac{\sigma}{\tau} (\overset{\perp}{T}' - \overset{\perp}{N}'), \tag{2.23}$$

Differentiating (2.21) and using (2.20)<sub>3</sub> we have

$$\left( \frac{\kappa}{\tau} \right)' (\overset{\perp}{T}' - \overset{\perp}{N}') + \left( \frac{\kappa}{\tau} \right) (\overset{\perp}{T}'' - \overset{\perp}{N}''') = \frac{\tau}{\kappa} \overset{\perp}{N}' - \frac{\sigma}{\kappa} \overset{\perp}{E}' \tag{2.24}$$

taking the first derivative of (2.21) and substituting (2.20)<sub>1</sub>, (2.21), (2.22) and (2.23) in this

expression we obtain,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mathbf{r}}{T^{(iv)}} + \left[ \left( \frac{\kappa}{\sigma} \right)'' \frac{\tau}{\chi} + 2 \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\tau} \right| \right]' + \left( \frac{\sigma}{\kappa} \right)' \cdot \frac{1}{\sigma} \right] \frac{\mathbf{r}}{T^m} + \left[ \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\tau} \right| \right]' \cdot \left( \frac{\sigma}{\kappa} \right)' \cdot \frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma^2}{\kappa} - 1 \right] \frac{\mathbf{r}}{T^n} \\
 & + \left[ \left( \frac{\sigma}{\kappa} \right)' \cdot \frac{\tau^2}{\kappa\sigma} - \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \cdot \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' - \left( \frac{\sigma}{\kappa} \right)' \cdot \frac{1}{\sigma} - 2 \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\tau} \right| \right]' \right] \frac{\mathbf{r}}{T} \\
 & + \left[ - \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)'' \cdot \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' - \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\tau} \right| \right]' \cdot \left( \frac{\sigma}{\kappa} \right)' \cdot \frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma^2}{\kappa} \right] \frac{\mathbf{r}}{T} = 0
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

**Theorem 2.4.** Suppose  $X = X(s), Y = Y(s)$  are space-like curves with time-like trinormal vector in  $L^4$  and let the first curvature of  $X = X(s)$  be constant. If trinormal indicatrix of  $X = X(s)$  is tangent indicatrix of  $Y = Y(s)$ , then the third curvature of  $Y = Y(s)$  is constant.

**Proof.** Let's calculate Frenet formulas of curve  $Y = Y(s)$ . Let  $\overset{1}{T}_x, \overset{1}{N}_x, \overset{1}{B}_x, \overset{1}{E}_x, \kappa_x, \tau_x, \sigma_x$ , and

$\overset{1}{T}_y, \overset{1}{N}_y, \overset{1}{B}_y, \overset{1}{E}_y, \kappa_y, \tau_y, \sigma_y$  be Frenet elements of curve  $X = X(s)$  and  $Y = Y(s)$ , respectively.

Suppose  $s_y$  be arc length parametrized of  $Y = Y(s)$ . Then, we can write

$$\overset{1}{Y} = \int \overset{1}{E}_x(s) ds, \tag{2.26}$$

differentiating both sides of (2.26) with respect to  $s$ , we have

$$\frac{d\overset{1}{Y}}{ds} = \frac{dY}{ds_y} \cdot \frac{ds_y}{ds} = \overset{\mathbf{r}}{E}_x.$$

Since

$$\frac{d\overset{1}{Y}}{ds_y} = \overset{\mathbf{r}}{T}_y, \tag{2.27}$$

we get

$$\overset{\mathbf{r}}{T}_y \cdot \frac{ds_y}{ds} = \overset{\mathbf{r}}{E}_x, \tag{2.28}$$

and using this expression, we obtain

$$\overset{1}{T}_y = \overset{1}{E}_x \text{ and } \frac{ds_y}{ds} = 1, \quad (2.29)$$

taking the derivatives of both side of (2.29) with respect to  $s$ , we get  $\chi_y \cdot \overset{1}{N}_y = \sigma_x \cdot \overset{1}{B}_x$  and here we obtain  $\overset{1}{N}_y = \overset{1}{B}_x$  and  $\chi_y = \sigma_x$ , taking the derivative of both sides of expression  $\overset{1}{N}_y = \overset{1}{B}_x$  with respect to  $s$  we obtain

$$-\kappa_y \cdot \overset{1}{T}_y + \tau_y \cdot \overset{1}{B}_y = -\tau_x \cdot \overset{1}{N}_x + \sigma_x \cdot \overset{1}{E}_x$$

and the expression, we have

$$\tau_y = \tau_x \text{ and } \overset{1}{B}_y = -\overset{1}{N}_x. \quad (2.30)$$

If exterior product of  $\overset{1}{T}_y \wedge \overset{1}{N}_y \wedge \overset{1}{B}_y$  is formed, we obtain

$$\overset{1}{E}_y = -\overset{1}{T}_x, \quad (2.31)$$

and taking the derivative of both side of (2.30) with respect to  $s$ , we get

$$\sigma_y \cdot \overset{1}{B}_y = -\kappa_x \cdot \overset{1}{N}_x. \quad (2.32)$$

Since  $\overset{1}{B}_y = -\overset{1}{N}_x$  from (2.30)<sub>2</sub> we get

$$\sigma_y = \kappa_x. \quad (2.33)$$

ince  $\kappa_x$  is constant,  $\sigma_y$  is also found as constant by using (2.33).

**Theorem 2.5.** Let tangents, principal normals, binormals and trinormals indicatrices of space-like curve  $X$  be  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , respectively. If spherical indicatrices of

$$X : I \rightarrow L^4$$

$$s \rightarrow X(s)$$

satisfy following conditions, then they are regular curve

- i) The curve  $X_1$  is regular  $\Leftrightarrow \kappa \neq 0$
- ii) The curve  $X_2$  is regular  $\Leftrightarrow \sqrt{\kappa^2 - \tau^2} \neq 0$  ( $\kappa \neq 0, \tau \neq 0$ )
- iii) The curve  $X_3$  is regular  $\Leftrightarrow \sqrt{|\tau^2 - \sigma^2|} \neq 0$  ( $\tau \neq 0, \sigma \neq 0$ )
- iv) The curve  $X_4$  is regular  $\Leftrightarrow \sigma \neq 0$

**Proof.** From (1.10)

- i) Since,

$$X_1 = \overset{\mathbf{r}}{T} \Rightarrow \frac{dX_1}{ds} = \kappa \overset{\mathbf{r}}{N},$$

the curve  $X_1$  is regular  $\Leftrightarrow \left\| \frac{dX_1}{ds} \right\| = \kappa \neq 0$

- ii) Similarly, since

$$X_2 = \overset{\mathbf{r}}{N} \Rightarrow \frac{dX_2}{ds} = -\kappa \overset{\mathbf{r}}{T} + \tau \overset{\mathbf{r}}{B},$$

the curve  $X_2$  is regular  $\Leftrightarrow \left\| \frac{dX_2}{ds} \right\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$  ( $\kappa \neq 0, \tau \neq 0$ )

- iii) Also, since

$$X_3 = \overset{\mathbf{r}}{B} \Rightarrow \frac{dX_3}{ds} = -\tau \overset{\mathbf{r}}{N} + \sigma \overset{\mathbf{r}}{E},$$

the curve  $X_3$  is regular  $\Leftrightarrow \frac{dX_3}{ds} = \sqrt{|\tau^2 - \sigma^2|}$  ( $\tau \neq 0, \sigma \neq 0$ )

- iv) Finally, since

$$X_4 = \overset{\mathbf{r}}{E} \Rightarrow \frac{dX_4}{ds} = \sigma \overset{\mathbf{r}}{B},$$



The curve  $X_4$  is regular  $\Leftrightarrow \left\| \frac{dX_2}{ds} \right\| = \sigma \neq 0$ . with time-like trinormal vector.

## REFERENCES

- [1] Ekmekçi, N., Lorentz manifoldları üzerinde eğilim çizgileri, Doktora Tezi, A.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, 1991.
- [2] Fox, L., Parker, I. B., Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, Oxford University Press, 1968.
- [3] Gluck, H., Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space, Proc.America.Math.Monthly, 73,699-704, 1966.
- [4] O'Neill, B., Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, NY, 1983.
- [5] Şemin, F., Diferansiyel Geometri-I, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1983.
- [6] Turgut, A., 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Space-Like ve Time-Like Regle Yüzeyler. A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 1995.
- [7] Yılmaz, S., Spherical Indicators of Curves and Characterisations some Special Curves In Four Dimensional Lorentzian Space, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2001.
- [8] Mağden, A.,  $R^4$  Uzayında Bazı Özel Eğriler ve Karakterizasyonları, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, 1990.

# KAOTİK ATEŞBÖCEĞİ OPTİMİZASYON ALGORİTMASI KULLANILARAK TERMİK GÜÇ SANTRALLERİ ETKİSİNDEKİ EKONOMİK YÜK DAĞITIM PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Nihat PAMUK

*TEİAŞ 5. İletim Tesis ve İşletme Grup Müdürlüğü, Test Grup Başmühendisliği, Sakarya, 54100*

## Özet

Ateşböceği optimizasyon algoritması birçok bilimsel ve mühendislik alanında kullanılmış etkili bir hesaplama algoritmasıdır. Bu çalışmada, termik güç santralleri etkisindeki ekonomik yük dağıtım problemleri kaos teorisine dayalı “Kaotik Ateşböceği Optimizasyon Algoritması” (KAOA) ile çözülmüştür. Ağırlıklı toplam metodu kullanılarak çok amaçlı optimizasyon problemi olarak tanımlanan termik güç santralleri etkisindeki ekonomik yük dağıtım problemleri, tek amaçlı optimizasyon problemlerine çevrilmiştir. Kayıp matrisi, problemin çözümü için gerekli olan enerji iletim hatlarındaki hat kayıplarını hesaplamak için kullanılmıştır. Elektriksel sınırlamalar dikkate alınarak, toplam yakıt maliyeti minimize edilmiştir. Ekonomik yük dağıtım problemleri IEEE-57 baralı 7 jeneratörlü örnek bir güç sistemi için iletim kayıpları ihmal edilmeden KAOA kullanılarak çözülmüştür. Bu problemler için en iyi çözüm değerleri elde edilmeye çalışılmıştır. Elde edilen bu değerler, literatürdeki diğer yaklaşımlar ile karşılaştırıldığında daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Kaotik Ateşböceği Optimizasyon Algoritması (KAOA), Hat Kayıpları, Termik Güç Santralleri, Kaos, Ağırlıklı Toplam Metot, Ekonomik Yük Dağıtım Problemleri.

## **SOLUTION OF ECONOMIC LOAD DISTRIBUTION PROBLEMS IN THE EFFECT OF THERMAL POWER PLANTS USING CHAOTIC FIREFLY OPTIMIZATION ALGORITHM**

### **Abstract**

The firefly optimization algorithm is a computationally efficient optimization algorithm which has been used in many science and engineering applications. In this study, economic load distribution problems in the effect of thermal power plants were solved by "Chaotic Firefly Optimization Algorithm" (CFOA) based on chaos theory. An economic load distribution problem in the effect of thermal power plants that is a multi-mission optimization issue has been transformed into a single mission optimization issue using the weighted sum method. Loss matrix has been used for the computation of the energy transmission line losses in the solution of the economic load distribution problem. Total fuel cost has been minimized under electrical contingency conditions. Economic load dispatch problems are solved by using CFOA method for IEEE 57 buses with 7 generators sample power system with including transmission losses. It is tried to get optimum solutions for these problems. When obtained values are compared with the other approaches in the literature, it is seen that the obtained results are better than them.

**Keywords:** Chaotic Firefly Optimization Algorithm (CFOA), Transmission Losses, Thermal Power Plants, Chaos, Weighted Sum Method, Economic Load Distribution Problems.

Sorumlu Yazar: Nihat PAMUK, e-posta: [nihatpamuk@gmail.com](mailto:nihatpamuk@gmail.com)

## 1 GİRİŞ

Güç sisteminin işletilmesindeki en önemli konulardan birisi ekonomik yük dağıtım problemlerinin çözümüdür. Elektrik üretiminde kullanılan yakıt fiyatının üretim maliyetleri üzerinde önemli bir miktara ulaşması sonucunda, üretim santralleri enerji kaynağı olan yakıtı daha verimli kullanmaya yönelmiştir. Böylece elektrik üretim sistemlerinin ekonomik olarak işletilmesi gündeme gelmiştir. Ekonomik yük dağıtım problemleri, sistemde var olan yükün üretim birimleri tarafından belirlenen kısıtlar içerisinde minimum maliyette olacak şekilde çıkış güçlerinin ayarlanması olarak tanımlanır [1-2]. Yük dağıtım problemleri optimal güç akışı verilerini içerecek şekilde gelecek zamanlı yük tahmin metotları kullanılarak çözümlenirse, daha büyük ve daha karmaşık bir yapıya sahip olacaktır [3-4].

Enerji üretim sistemleri büyüdükçe ekonomik yük dağıtım problemlerinin çözümü karmaşık bir hal almaktadır. Kömür, petrol ve doğal gaz gibi fosil kaynaklı yakıtları kullanan üretim birimleri atmosfere parçacık ve gazlardan oluşan nitrojen oksit  $NO_x$ , sülfür dioksit  $SO_2$  ve karbondioksit  $CO_2$  atıkların ortaya çıkmasına neden olup çevresel kirliliğe neden olmakla birlikte küresel ısınmaya da yol açmaktadır [5-6]. Çevresel etkilerde göz önünde bulundurulduğunda, ekonomik dağıtım problemi emisyon etkilerinin de dahil edildiği çok amaçlı bir optimizasyon problemine dönüşmektedir. Bu problem ağırlıklı toplam metodu [7] kullanılarak hem ekonomik yük dağıtımının hem de emisyon değerinin belirlenebileceği tek amaçlı optimizasyon problemine dönüştürülür. Literatür taraması göre birden fazla amaca sahip olan optimizasyon problemleri iki farklı şekilde çözüme kavuşturulur. Bunlardan ilki çok amaçlı optimizasyon problemlerini çözen yöntemlerin direkt olarak kullanılmasıyla gerçekleştirilir. Bir diğer yöntem ise çok amaçlı optimizasyon problemlerinde indirgeme yaparak problemi tek amaçlı optimizasyon problemine dönüştürüp çözüm yönteminin uygulanması biçimindedir.

Ekonomik yük dağıtım problemlerini çözmek için doğadan ve birçok meta-sezgisel algoritmalarından geliştirilen farklı iki hibrit optimizasyon algoritmalarıyla [8-9], değişken sayısına ve veri tiplerine bağlı olarak problemlerin deterministik yöntemlerle çözümünü gerçekleştiren diferansiyel gelişim algoritmasıyla [10], veya genetik algoritmaya dayanan popülasyon temelli sezgisel çözüm sağlayan geliştirilmiş diferansiyel gelişim algoritmalarıyla [11], kuş veya balık

sürülerinin davranışlarını taklit ederek çözüme ulaşan parçacık sürü optimizasyonu algoritmasıyla [12], arıların besin arama davranışlarından esinlenerek geliştirilen yapay arı koloni optimizasyon algoritmasıyla [13], çözüm uzayı hakkında varsayımlar yaparak daha uygun yeni bir nesil oluşturan evrimsel programlama algoritmasıyla [14], evrimsel programlama algoritmasıyla elde edilen sonuçları genetik arama (yeniden yapılanma ve mutasyon) yöntemiyle daha güçlü bireyler oluşturarak çözen geliştirilmiş evrimsel programlama algoritmalarıyla [15], değerlendirme fonksiyonu tarafından kullanılan her iterasyondaki en yüksek değerlendirme değerine sahip hareketin çözüm uzayını oluşturması amacıyla seçilmesine dayanan tabu arama ve geliştirilmiş tabu arama algoritmalarıyla [16-17], insan vücudunun hastalıklara karşı savunma mekanizmasını oluşturan ve vücudun zararlı maddelere karşı savaşmasından esinlenerek geliştirilen yapay bağışıklık sistemi algoritmasıyla [18], grup yaşam teorisi ve canlıların besin arama davranışlarından esinlenerek ortaya çıkan geliştirilmiş grup arama optimizasyon algoritmasıyla [19], ve Escherichia-Coli bakterilerinin yaşam döngüsü modelinin taklit edilmesiyle çözüme ulaşan bakteri yem arama optimizasyon algoritmasıyla [20] çözülmüştür. Bu çalışmada, başlangıç durumuna ve sistem parametrelerine karşı oldukça duyarlı determinist bir sistem olan kaos teorisi [27] tanımlanarak, ekonomik yük dağıtım problemlerinin çözümünde “Kaotik Ateşböceği Optimizasyon Algoritması” (KAOA) uygulanmıştır.

## 2 EKONOMİK YÜK DAĞITIM PROBLEMLERİNİN MATEMATİKSEL OLARAK FORMÜLE EDİLMESİ

Çevresel ekonomik yük dağıtım problemleri ekonomik yük dağıtım problemlerine emisyon parametreleri eklenerek formüle edilir. Ekonomik yük dağıtım problemlerine ait amaç fonksiyonu eşitlik 1’de verilmiştir.

$$F(P_G) = \sum_{i=1}^n (a_i P_{gi}^2 + b_i P_{gi} + c_i), \quad (\$/h) \quad (1)$$

Eşitlik 1’de;

$F(P_g)$ : sistemdeki güç üretiminin toplam yakıt maliyetini,  
( $\$/h$ ),  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ : i. jeneratörün yakıt maliyet katsayılarını,

$P_{gi}$ : i. jeneratörün ürettiği güç miktarını,  
n: toplam jeneratör sayısını göstermektedir.

Ekonomik yük dağıtım problemlerinde talep edilen yükü minimum maliyet ile karşılayabilmek için farklı birimlerin üreteceği aktif güç miktarlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Çevresel olmayan ekonomik yük dağıtım problemlerinde emisyon maliyeti dikkate alınmaz. Fosil kaynaklı termal jeneratör birimlerinin neden olacağı emisyon miktarı, bu birim tarafından üretilen güç miktarına bağlıdır. Emisyon miktarı, jeneratörün aktif çıkış gücüne bağlı olarak ikinci dereceden bir denklem ile ifade edilmektedir. Emisyon miktarının değeri eşitlik 2 ile hesaplanır [6-7].

$$E(P_G) = \sum_{i=1}^n (d_i P_{gi}^2 + e_i P_{gi} + f_i), \quad (\text{kg/h}) \quad (2)$$

Eşitlik 2’de;

$E(P_g)$ : toplam emisyon miktarını,  
(kg / h),  $d_i$ ,  $e_i$ ,  $f_i$ : i. jeneratörün emisyon katsayılarını göstermektedir.

Ekonomik yük dağıtım problemi yakıt maliyeti ve emisyon miktarı kullanılarak tek optimizasyon problemine dönüştürmektedir. Eşitlik 3’de elektriksel sistemin toplam işletim maliyet fonksiyonu verilmiştir.

$$T = w_1 * F(P_G) + w_2 * h * E(P_G) \quad (3)$$

Eşitlik 3’de;

T: sistemin toplam işletim maliyetini,  
 $w_1$ ,  $w_2$ : ağırlık faktörlerini,  
h: fiyat ceza faktörünü göstermektedir.

Ekonomik yük dağıtım problemleri aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir [7].

- Salt ekonomik yük dağıtım problemleri için;  $w_1 = 1$  ve  $w_2 = 0$ 'dır.
- Salt ve çevresel ekonomik yük dağıtım problemleri için;  $w_1 = 0$  ve  $w_2 = 1$ 'dir.
- Çevresel ekonomik yük dağıtım problemleri için;  $w_1 = 1$  ve  $w_2 = 1$ 'dir.

Fiyat ceza faktörünün değerini hesaplayabilmek için, her bir jeneratörün maksimum güç değerindeki ortalama maliyet değeri eşitlik 4 ile hesaplanır.

$$\frac{F_i(P_{i,maks})}{(P_{i,maks})} = \frac{a_i P_{i,maks}^2 + b_i P_{i,maks} + c_i}{(P_{i,maks})}, \quad (\$/MWh) \quad (4)$$

Her bir jeneratörün maksimum güç değerindeki ortalama emisyon değeri eşitlik 5 ile hesaplanır.

$$\frac{E_i(P_{i,maks})}{(P_{i,maks})} = \frac{d_i P_{i,maks}^2 + e_i P_{i,maks} + f_i}{(P_{i,maks})}, \quad (kg/MWh) \quad (5)$$

Fiyat ceza faktörünün değeri her bir jeneratörün ortalama maliyetinin ortalama emisyon miktarına bölünmesi ile bulunur. Her bir jeneratöre ait fiyat ceza faktörünün değeri eşitlik 6 ile hesaplanır.

$$\frac{F_i(P_{i,maks}) / (P_{i,maks})}{E_i(P_{i,maks}) / (P_{i,maks})} = \frac{a_i P_{i,maks}^2 + b_i P_{i,maks} + c_i}{d_i P_{i,maks}^2 + e_i P_{i,maks} + f_i}, \quad (\$/kg) \quad (6)$$

Eşitlik 6 yeniden düzenlenirse eşitlik 7 elde edilir.

$$\frac{F_i(P_{i,maks}) / (P_{i,maks})}{E_i(P_{i,maks}) / (P_{i,maks})} = h_i, \quad i = 1, \dots, n \dots \$/kg \quad (7)$$

Her bir jeneratöre ait  $h_i$  değeri (fiyat ceza faktörü) artan bir şekilde sıralanır. Eşitlik 8'de

gösterildiği gibi en küçük  $h_i$  değerinden başlanarak jeneratörlerin maksimum güç değerlerinin toplamı talep edilen yüke eşit veya talep edilen yükten büyük olana kadar toplama işlemine devam edilir.

$$\sum_{i=1}^n P_{i,maks} \geq P_D \quad (8)$$

Toplama işlemine dahil edilen en son birimin  $h_i$  değeri, yeni fiyat ceza faktörü olarak ( $h$ ) kabul edilir. Eşitlik 3’de  $w_1 = w_2 = 1$  kabul edilerek ve yeni hesaplanan  $h$  değeri kullanılarak, çevresel ekonomik yük dağıtım formülü elde edilmektedir.

### 3 KAOTİK ATEŞBÖCEĞİ OPTİMİZASYON ALGORİTMASI

#### 3.1 Ateşböceği Optimizasyon Algoritması

Ateşböcekleri tropikal ve ılıman bölgelerde yaymış oldukları ışık huzmeleri sayesinde muhteşem bir manzara oluşmasına neden olmakta ve doğada yaklaşık 2000 farklı türü bulunmaktadır [21]. Ateşböceklerinin yaymış olduğu ışık kaynağı iki ana fonksiyona sahiptir. Bu fonksiyonlar avlarını cezbederek yakalayabilme durumu ve eşlerine kur yaparak çiftleşebilme durumudur [23]. Ateşböcekleri vücut yüzeyinde bulunan fotojenik hücreler sayesinde ışık üretebilmektedirler [22]. Ateşböceği optimizasyon algoritması 2008 yılında Xin-She Yang [24] tarafından ateşböceklerinin parlaklık ve hareket yönlerini dikkate alarak tasarlanmış bir algoritma çeşididir. Ateşböceği optimizasyon algoritması üç farklı ilkeye dayalı olarak çalışmaktadır. Bu ilkeler aşağıda özetlenmiştir [25]:

- Ateşböcekleri unisex olarak kabul edilmekte ve cinsiyet ayrımı yapılmaksızın birbirini etkilemektedir.
- Ateşböceğinin etkinlik değeri parlaklık derecesine bağlı olarak belirlenmektedir. Ateşböceğinin çekicilik değeri ise etkinlik değerine bağlı olduğundan, en parlak olan ateşböceği diğer ateşböceklerini kendisine doğru çekmektedir. Eğer çevresinde, kendisinden daha parlak bir ateşböceği yoksa rastgele bir şekilde hareket etmektedir.



- Parlaklığı düşük olan ateşböcekleri, parlaklığı daha yüksek olan ateşböceklerine doğru hareket etmektedir. Ateşböceğinin etkinlik faktörü ve parlaklığı, ekonomik yük dağıtım problemlerinin amaç fonksiyonuna ve türüne göre belirlenmektedir.

Ateş böceği algoritmasının başlangıç aşamasında tüm ateşböcekleri rastgele bir şekilde arama uzayında bulunmaktadır. Amaç fonksiyonuna göre “m” tane ateşböceği sürüsü kullanılmaktadır. Her bir “i” ateşböceğine ait “ $x_i$ ” çözümünün uygunluk değeri tespit edilmektedir. Tespit edilen uygunluk değerleri çözüm uzayının maliyetini (en iyiye olan uzaklığını) belirtmektedir. Tespit edilen optimizasyon fonksiyonu eşitlik 9’da gösterilmiştir.

$$f(x^*) = \min_{x \in S} f(x) \quad (9)$$

Tüm ateşböcekleri için “ $x_i$ ” problem boyutu kadar bireye sahiptir ve rastgele değerlerle oluşturulmaktadır. Her bir birey çözümün oluşturduğu değer “ $x_i$ ” problemini minimize edecek biçimde sıralanmaktadır. Amaç fonksiyonuna uygulanan her bir ateşböceğinin çözümü ilgili ateşböceğinin parlaklığını / ışık yoğunluğunu (I) ifade etmektedir [24]. Işık yoğunluğu fonksiyonu eşitlik 10’da gösterilmiştir.

$$I = I_0 e^{-\gamma r} \quad (10)$$

Eşitlik 10’da [24];

$I_0$ : Başlangıç ışık yoğunluğunu,

$\gamma$ : Işık soğurma katsayısını,

$\tau$ : İki ateşböceği arasındaki uzaklığı göstermektedir.

Ateşböceğinin çekiciliği parlaklığa ve uzaklığa bağlı olarak değişmektedir. Her bir ateşböceğine ait farklı bir çekicilik değeri bulunmaktadır [21]. Çekicilik değeri “ $\beta$ ” ile gösterilir. Ateşböceklerinin parlaklık değerleri birbirleri ile kıyaslanarak ateşböcekleri arasında etkilenme olup olmadığı tespit edilir. Parlaklığının daha düşük olduğu ateşböceğinin konum durumu, “ $x_i$ ” çözümünün etkilenen konumda olduğunu göstermektedir. Ateşböceğinin çekiciliğini tespit etmek amacıyla üstel bir amaç fonksiyonunun kullanılması gerekir [26].

$$r_{i,j} = \|x_i - x_j\| = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_{i,k} - x_{j,k})^2} \quad (11)$$

$$\beta = \beta_0 e^{-\gamma r_{i,j}} \quad (12)$$

Eşitlik 11'deki  $\beta_0$  parametresi iki ateşböceği arasındaki uzaklığı göstermekte ve  $r_{i,j} = 0$  olması durumundaki çekicilik parametresidir. Ateşböceklerinin çekicilik değeri (0-1) arasında bir değer almaktadır [21]. Işığın soğurma katsayısı sıfır ile sonsuz arasında değişmektedir. Soğurma katsayısının sıfır olması sabit bir çekicilik derecesine, sonsuz olması ise çekicilik derecesinin olmamasına (sıfır olması) karşılık gelir. Optimizasyon işlemi yapıldıktan sonra arama uzayındaki  $\gamma$  parametresinin değeri eşitlik 13 ve eşitlik 14 formülü ile bulunur. Söz konusu eşitliklerdeki  $\gamma_0$  parametresi sıfır ile bir arasında değişen sabit bir değerdir.

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{r_{\max}} \quad (13)$$

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{r_{\max}^2} \quad (14)$$

$$r_{\max} = \max d(x_i, x_j), \forall x_i, x_j \in S \quad (15)$$

$\beta$  ifadesindeki değere bağlı olarak az çekici olan “i.” ateşböceği kendisinden daha çekici olan “j.” ateşböceğine doğru hareket eder. Yapılan bu hareket eşitlik 16 ve eşitlik 17 ile gösterilmiştir [26].

$$x_{i,k} = (1 - \beta) \cdot x_{i,k} + \beta \cdot x_{j,k} + u_{i,k} \quad (16)$$

$$x_i^{t+1} = x_i + \beta_0 e^{(-\gamma r_{ij}^2)} (x_j - x_i) + a \varepsilon_i^t \quad (17)$$

Eşitlik 17'de;

$x_i$ : i. ateşböceğinin aday çözümünü,

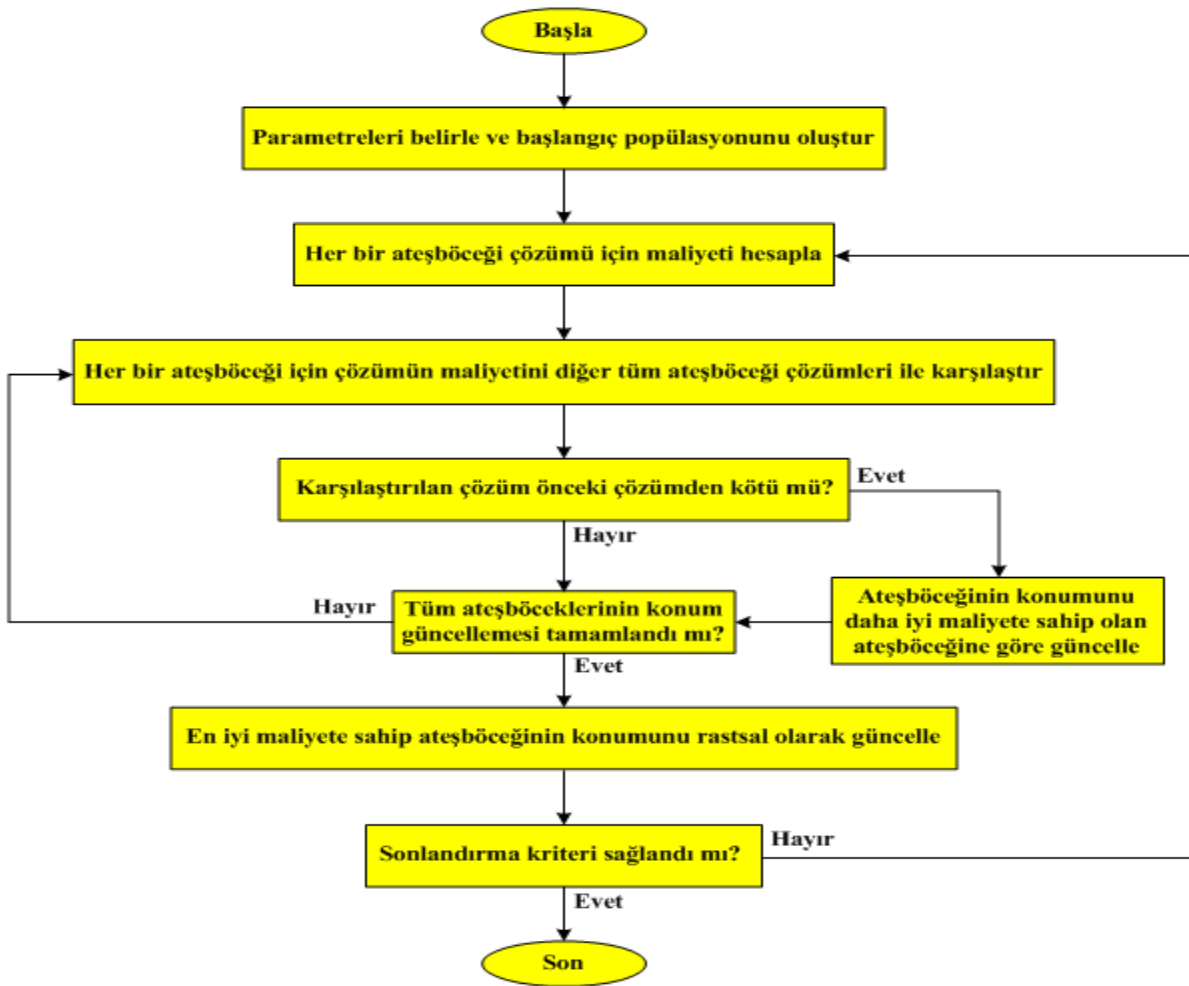
$x_j$ : j. ateşböceğinin aday çözümünü,

$\varepsilon_i$ : gauss dağılımını göstermektedir.

Eşitlik 18' e göre en parlak olan ateşböceği arama uzayında rastgele bir şekilde hareketine devam edecektir.

$$x_{i,k}^{\max} = x_{i,k}^{\max} + u_{i,k}^{\max} \quad k = 1, 2, \dots, d$$
$$u_{i,k}^{\max} = \alpha \cdot \left( \text{rand} \cdot 1 - \frac{1}{2} \right)$$
(18)

Ateşböceği optimizasyon algoritmasına ait akış şeması şekil 1'de gösterilmiştir.



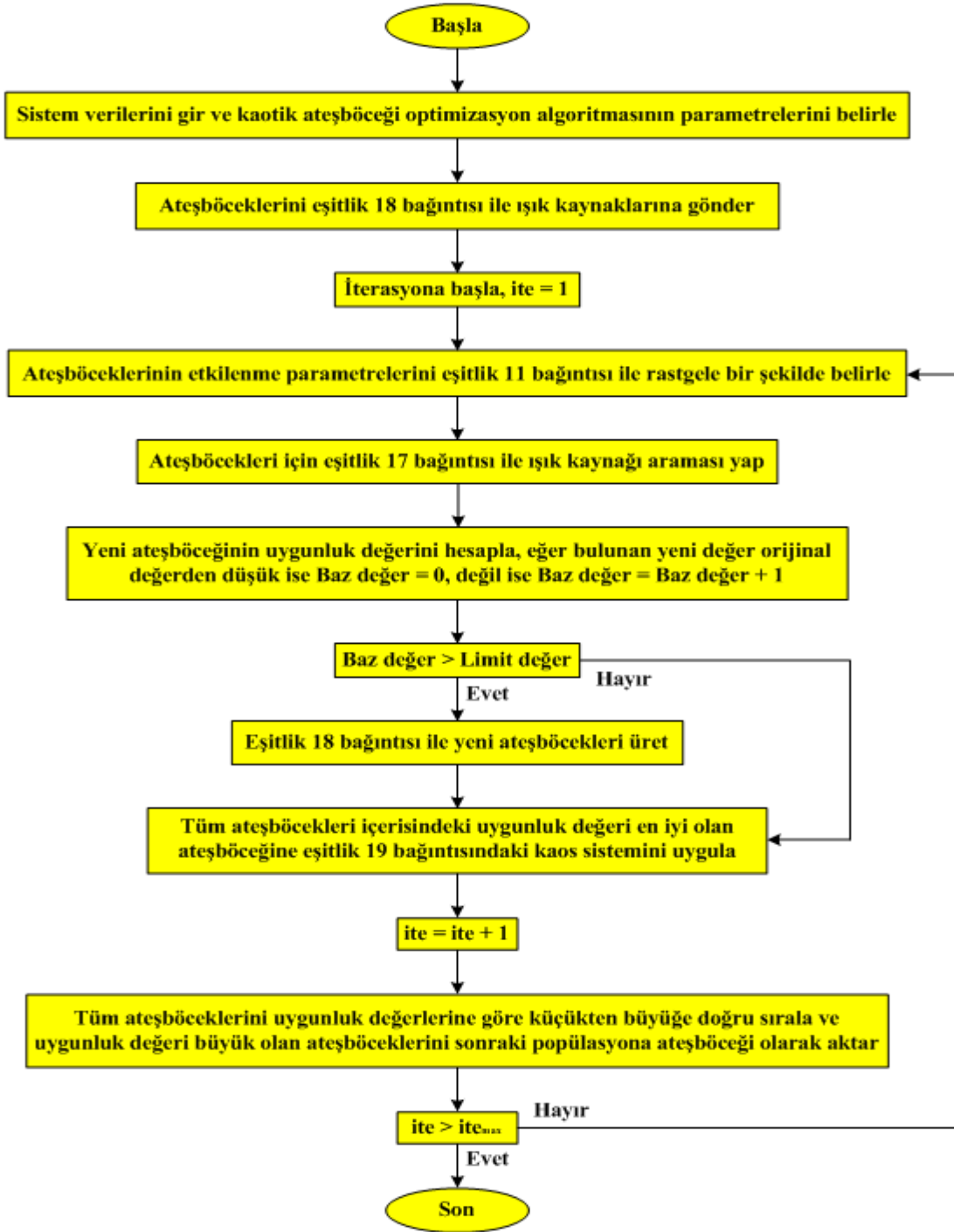
Şekil 1: Ateşböceği optimizasyon algoritması akış şeması

### 3.2 Kaotik Ateşböceği Optimizasyon Algoritması

Kaos, son yıllarda ortaya konulan sistem parametrelerine karşı oldukça hassas, güçlü rastsal bir arama optimizasyon algoritmasıdır. Kaos teorisi günlük yaşamda rastgelelilik ve tahmin edilemezlik olarak düşünülse de bu görüşün aksine olaylar belirli bir düzen içerisinde gerçekleşmektedir. Kaos teorisi bilimin birçok dalında meta sezgisel yöntemlerin değişik kısımlarında başarı ile uygulanmıştır. Bu çalışmada kaos teorisi, her iterasyon sonunda en iyi ışık yayan ateşböceğine uygulanmıştır. Teori sonucunda elde edilen en iyi ateşböceklerinin değişken değerleri (0-1) arasında ayarlanır. Kaos teorisinde ateşböceklerinin değişken değerleri ile bir önceki ateşböceğinin değişken değerleri arasındaki bağıntı eşitlik 19 ile bulunur. Bu işlem hedeflenen kaotik ateşböceği birey sayısına ulaşıncaya kadar devam etmektedir.

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \quad (19)$$

Kaos teorisinden elde edilen ateşböceklerinin değişken değerleri modellenmesi yapılan sistem değerlerine çevrildikten sonra ateşböceklerinin yeni uygunluk değerleri hesaplanır ve ateşböceği popülasyonuna eklenir. En uygun çözümü veren ateşböcekleri bir sonraki döngüye konum güncellemesinden sonra aktarılmaktadır. Şekil 2’de kaotik ateşböceği optimizasyon algoritmasının akış şeması gösterilmiştir.



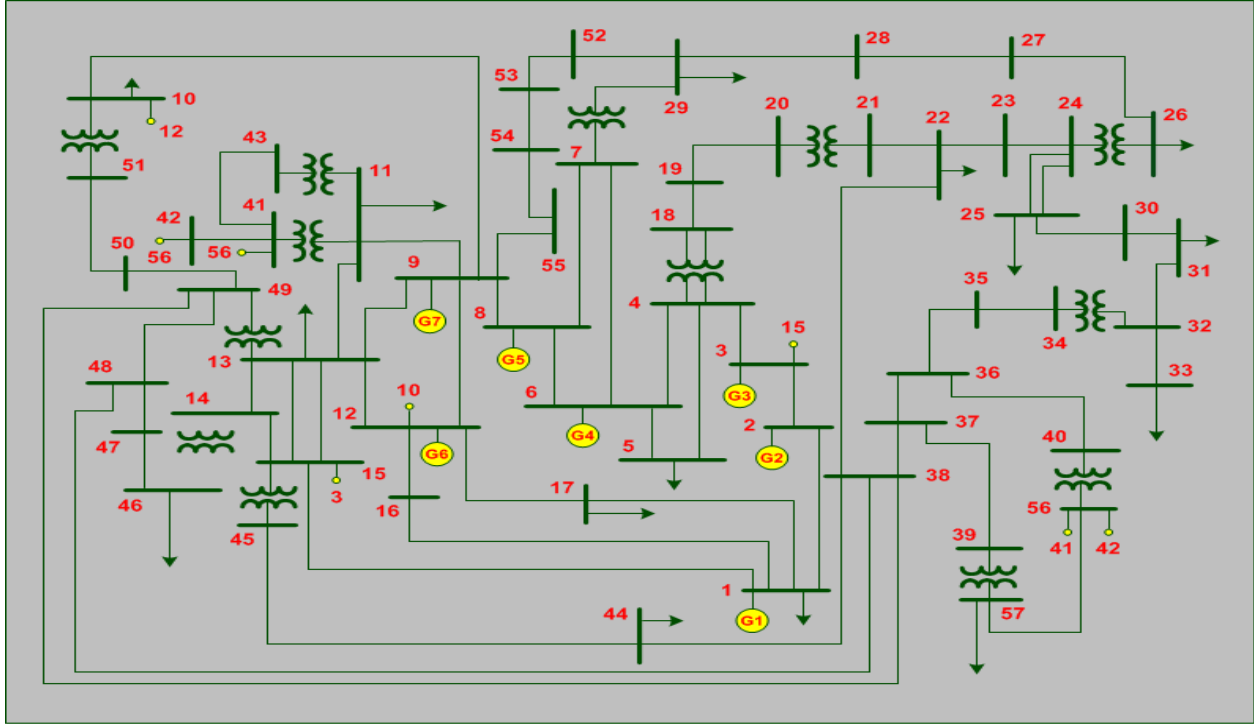
Şekil 2: Kaotik ateşböceği optimizasyon algoritması akış şeması

Termik güç santralleri etkisindeki ekonomik yük dağıtım problemlerinde uygulanan kaotik ateşböceği optimizasyon algoritmasının işlem basamakları aşağıda gösterilmiştir.

- 1. Adım:** Sistem verilerini ve kaotik ateşböceği optimizasyon algoritmasının değerlerini gir.
- 2. Adım:** Eşitlik 18 bağıntısı ile ateşböceklerini ışık kaynaklarına gönder.
- 3. Adım:** İterasyona başla, ite=1.
- 4. Adım:** Eşitlik 11 bağıntısı ile ateşböceklerinin etkilenme parametrelerini rastgele bir şekilde belirle.
- 5. Adım:** Eşitlik 17 bağıntısı ile ateşböcekleri için ışık kaynağı araması yap.
- 6. Adım:** Yeni ateşböceğinin ışık kaynağına göre olan uygunluk değeri, diğer ateşböceklerinin ışık kaynağına göre olan uygunluk değerlerinden iyi ise (Baz değer = 0) yeni ateşböceğinin konumunu güncelle. (Daha iyi değil ise, Baz değer = Baz değer + 1)
- 7. Adım:** Baz değer limit değerden büyük ise 8. Adıma, değil ise 9. Adıma git.
- 8. Adım:** Elde edilen baz değer sınır değerden büyük ise, eşitlik 18 bağıntısı yardımıyla yeni ateşböcekleri üret.
- 9. Adım:** Ateşböceği popülasyonundaki en iyi uygunluk değerine sahip bireye eşitlik 19 bağıntısına göre kaos teorisini uygula.
- 10. Adım:** Bir sonraki iterasyon için gerekli olan ateşböceklerini uygunluk değerlerine göre belirle.
- 11. Adım:** ite = ite + 1.
- 12. Adım:** Sonlandırma kriteri sağlanmış ise algoritmayı durdur, aksi takdirde 4. Adıma git.

#### 4 BENZETİM ÇALIŞMALARI

Şekil 3’de IEEE 7 jeneratörlü 57 baralı test sisteminin tek hat şeması gösterilmiştir. Sistemin  $P_{güç}=1263$  MW değeri için KAOA çözümü uygulanmıştır. Yapılan çalışmada ölçekleme faktörü  $\gamma = 500$ , ışık kaynağı sayısı (görevli ateşböceği sayısı) (M) 25, parametre sayısı (N) 15,  $wf_{max} = 0.9$ ,  $wf_{min} = 0.4$ , sınır limit değeri (çözüm geliştiremememe durum değeri) 20,  $Toplam_{hata} = 1 \times 10^{-6}$  MW ve iterasyon sayısı 100 olarak alınmıştır.



Şekil 3: IEEE 57 baralı 7 jeneratörlü test sistemine ait tek hat şeması

Problemde kullanılan üretim birimlerine ait yakıt maliyet fonksiyonu katsayıları, emisyon katsayıları ve aktif güç üretim sınır değerleri tablo 1’de gösterilmiştir.

Tablo 1. Üretim Birimlerinin Maliyet Fonksiyonu Emisyon Katsayıları ve Aktif Güç Üretim Sınırları

Parametre	G <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>5</sub>	G <sub>6</sub>	G <sub>7</sub>
a	100	120	40	60	40	100	90
b	200	150	180	100	180	150	150
c	10	10	20	10	20	10	20
d	4.091	2.543	4.258	5.326	4.258	6.131	4.965
e	-5.554	-6.047	-5.094	-3.550	-5.094	-5.555	-5.546
f	6.490	5.638	4.586	3.380	4.586	5.151	5.346
g	2.0E-4	5.0E-4	1.0E-6	2.0E-3	1.0E-6	1.0E-5	2.0E-3
h	2.857	3.333	8.003	2.086	8.065	6.667	3.659
P <sub>G</sub> <sup>min</sup>	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
P <sub>G</sub> <sup>max</sup>	0.5	0.6	1.0	1.2	1.0	0.6	1.2

KAOA'nın çevresel ekonomik yük dağıtım problemlerine uygulanması için Matlab R2015b programlama yazılımı kullanılmıştır. Bu yazılım Intel(R) Core(TM) i5-4570 3.2 GHz işlemcili ve 4 GB RAM bellekli bir bilgisayarda çalıştırılmıştır. Elde edilen B kayıp matrisi değerleri aşağıda verilmiştir.

$$[B] = \begin{bmatrix} 0.05265 & 0.06543 & 0.00356 & -0.02440 & 0.00863 & -0.03560 & 0.01715 \\ 0.06543 & 0.02569 & 0.00467 & -0.01650 & 0.00436 & 0.00298 & 0.00231 \\ 0.00356 & 0.00467 & 0.05873 & -0.01560 & -0.05340 & -0.0481 & -0.0198 \\ -0.0244 & -0.0165 & -0.0156 & 0.28751 & 0.29826 & 0.28165 & 0.19374 \\ 0.00863 & 0.00436 & -0.0534 & 0.29826 & 0.33386 & -0.0785 & -0.0198 \\ -0.0356 & 0.00298 & -0.0481 & 0.28165 & -0.0785 & 0.03214 & 0.02497 \\ 0.01715 & 0.00231 & -0.0198 & 0.19374 & -0.0198 & 0.02497 & 0.03418 \end{bmatrix}$$
$$[B_0] = [-0.0324 \quad 0.02145 \quad -0.0193 \quad 0.00538 \quad 0.00612 \quad 0.00861 \quad 0.01061]$$
$$[B_{00}] = [0.01085]$$

Ağırlık değerleri  $w = 1.0$ 'dan başlayarak 0.1 aralıklarla  $w = 0.0$  olana kadar 100 iterasyon ile çalıştırılmış ve optimal sonuçlar elde edilmiştir. Tablo 2'de KAOA ile elde edilen sonuçlar gösterilmiştir.

Tablo 2. IEEE 57 Baralı 7 Jeneratörlü Test Sistemi İçin Elde Edilen KAOA Değerleri

Ağırlık Değeri	Üretim birimlerinin per-unit cinsinden çıkış güçleri (pu)						
	G <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>5</sub>	G <sub>6</sub>	G <sub>7</sub>
1.0	3.88134	1.64557	2.35345	1.22457	1.65674	0.83544	0.73544
0.9	3.81390	1.61652	2.38670	1.46562	1.64653	0.85312	0.75636
0.8	3.81038	1.75455	2.37656	1.43613	1.74565	0.96464	0.80434
0.7	3.84575	1.76145	2.48940	1.46462	1.73452	0.98469	0.76781
0.6	3.86545	1.78621	2.45246	1.34637	1.76435	1.00451	0.81765
0.5	4.00331	1.63136	2.36244	1.36165	1.65152	1.11252	0.79453
0.4	4.00540	1.64364	2.38160	1.42461	1.72460	0.91954	0.84643
0.3	3.92184	1.71165	2.48914	1.30014	1.70048	0.94998	0.86352
0.2	3.90531	1.73942	2.49646	1.39810	1.69943	0.87753	0.80043
0.1	3.86927	1.74448	2.40974	1.39378	1.69076	0.97951	0.78329
0.0	3.88632	1.65889	2.39932	1.45033	1.68572	0.88836	0.84356

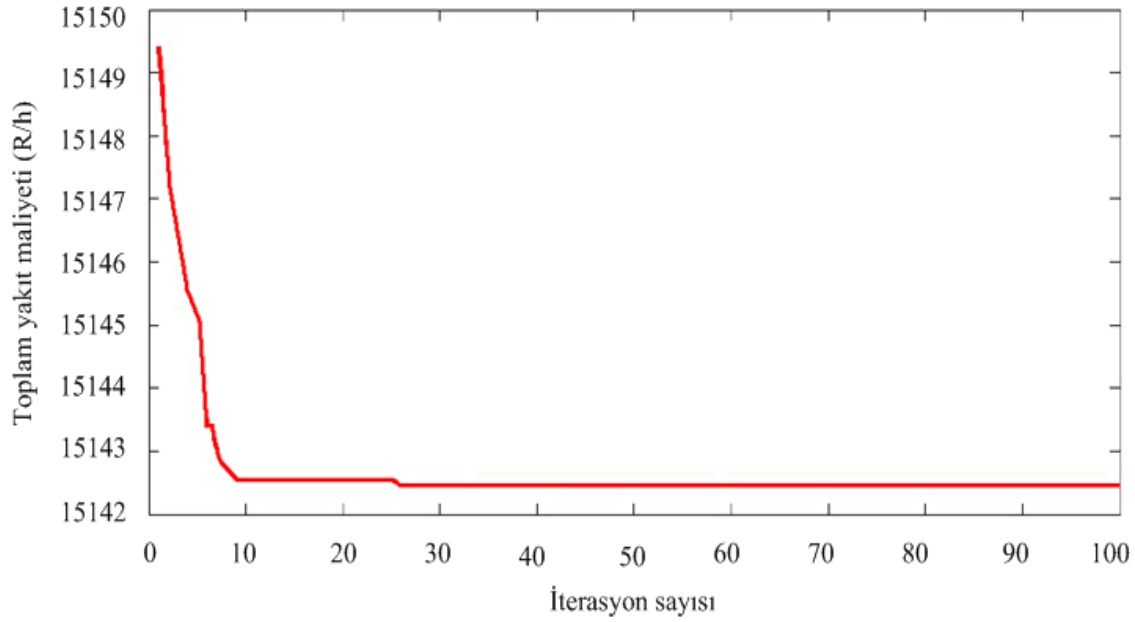


Tablo 3’de KAOA için IEEE 57 baralı 7 jeneratörlü test sistemine ait maliyet, emisyon, hat kayıpları ve algoritmaların optimal çözümleri için harcanan süreler gösterilmiştir.

Tablo 3. Maliyet, Emisyon, Hat Kayıpları ve Algoritmaların Optimal Çözümleri İçin Harcanan Süreler

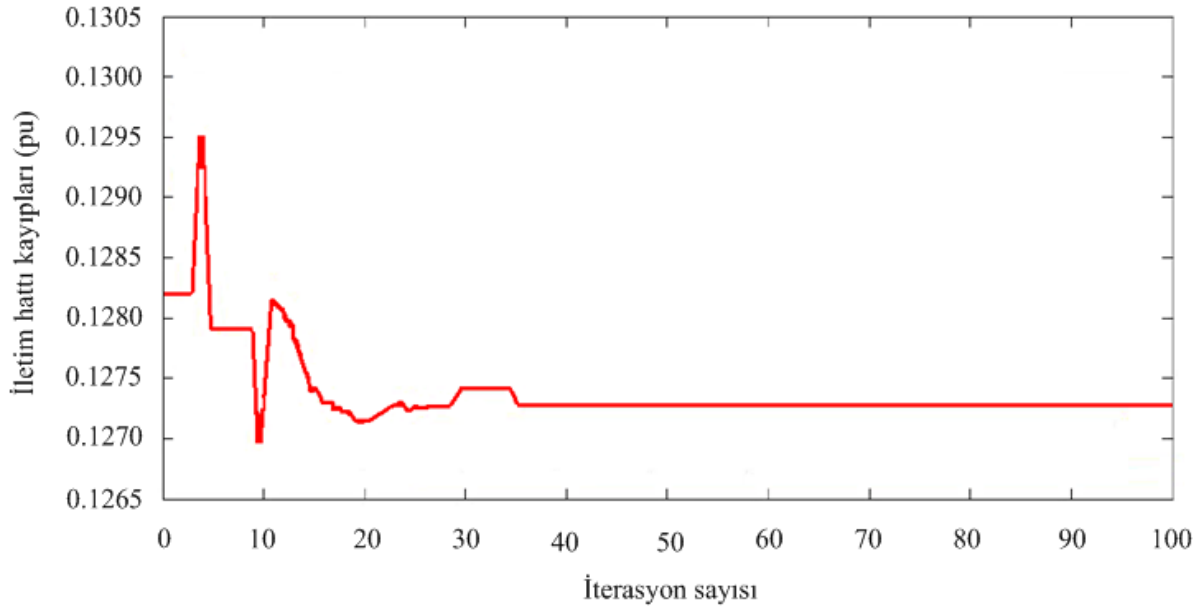
Algoritma Türü	Ağırlık Değeri (w)	Maliyet Değeri $F_{Toplam}$ (R/h)	Emisyon Değeri $E_{Toplam}$ (ton/h)	Hat Kayıpları (pu cinsinden)	Süre (sn)
KAOA	1.0	15149.054	0.28643	0.1283	0.297
	0.9	15148.976	0.27470	0.1279	0.283
	0.8	15148.952	0.28753	0.1276	0.281
	0.7	15148.763	0.28704	0.1291	0.253
	0.6	15147.008	0.28897	0.1295	0.301
	0.5	15146.651	0.27681	0.1280	0.306
	0.4	15146.635	0.27941	0.1289	0.277
	0.3	15145.003	0.28606	0.1297	0.296
	0.2	15144.430	0.27599	0.1281	0.291
	0.1	15143.769	0.28587	0.1274	0.295
	0.0	15143.410	0.28766	0.1271	0.282

Şekil 4’de KAOA’nın IEEE 57 baralı 7 jeneratörlü test sistemine uygulanmasından elde edilen toplam yakıt maliyeti değerlerinin değişim grafiği gösterilmiştir. Şekil 5’de KAOA’nın IEEE 57 baralı 7 jeneratörlü test sistemine uygulanmasından elde edilen iletim hattı kayıp değerlerinin değişim grafiği gösterilmiştir. Şekil 6’da ise KAOA’nın IEEE 57 baralı 7 jeneratörlü test sistemine uygulanmasından elde edilen generatör çıkış güçlerinin iterasyonlara göre değişimini gösteren grafikler verilmiştir.

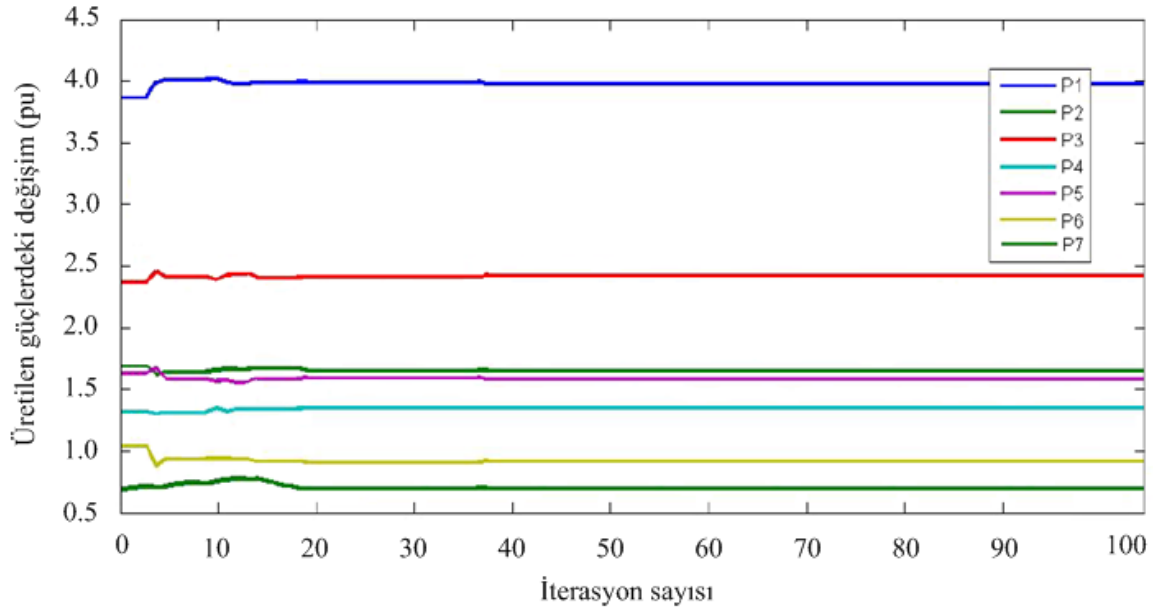


Şekil 4: Toplam yakıt maliyetinin iterasyonlara göre değişim grafiği

Şekil 4 incelenecek olursa, toplam yakıt maliyeti yaklaşık 27. iterasyonda en düşük değerine ulaşmaktadır. Toplam yakıt maliyeti 15142 ile 15150 (R/h) değerleri arasında değişmektedir. Şekil 5 incelendiğinde enerji iletim hatlarındaki güç kaybının değişimi yaklaşık 38. iterasyondan sonra değişmemiştir. Şekil 6 incelendiğinde jeneratör çıkış güçlerinin yaklaşık  $P_4$ 'ün 12.,  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_7$ 'nin 36.,  $P_3$ ,  $P_5$  ve  $P_6$ 'nın 38. iterasyonda en uygun değeri yakaladığı anlaşılmaktadır. Diğer bir deyişle, en uygun değerler yaklaşık 12 iterasyon ile 38. iterasyonlar arasında bulunmuştur. Sistemin 38. iterasyondan sonra en uygun değeri yakalamış ve bu değerde sabit kalmıştır. Test sistemindeki değişimlerin eşzamanlı olarak azalması, yapılan işlemlerin doğruluğunu göstermektedir.



Şekil 5: İletim hattı kayıplarının iterasyonlara göre değişim grafiği



Şekil 6: Üretilen güçlerin iterasyonlara göre değişim grafikleri

Tablo 4’de test sistemi için elde edilen optimal çözümler koyu olarak literatürdeki sonuçlarla birlikte karşılaştırılmıştır. KAOA ile IEEE 57 baralı 7 jeneratörlü test sisteminin çözümü yaklaşık 0.314 sn sürmüştür. Buna göre KAOA optimal çözümü elde etme açısından

diğer çoğu optimizasyon metotlarına göre daha basit ve kolay kodlanabilir bir algoritma olmakla birlikte oldukça hızlıdır. Tablo 4 incelendiğinde IEEE 57 baralı 7 jeneratörlü test sistemi için KAOA ile elde edilen toplam yakıt maliyetinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırıldığında, parçacık sürü optimizasyonu (PSO), genetik algoritma (GA), benzetim tavlama (BT), çoklu tabu arama (ÇTA), genişletilmiş parçacık sürü optimizasyonu (EPSO) ile elde edilen değerlerden daha iyi olduğu görülmektedir. Ayrıca KAOA ile elde edilen toplam yakıt maliyetinin yeni adaptif parçacık sürü optimizasyonu (YAPSO) ve geliştirilmiş parçacık sürü optimizasyonu (GPSO) elde edilen toplam yakıt maliyeti değerlerine göre yakınsama sağladığı görülmektedir.

Tablo 4. Test Sisteminin Literatürdeki Diğer Optimal Çözümler ile Karşılaştırılması

Baralar (MW)	Sezgisel Algoritmalar							
	PSO[12]	GA[11]	BT[10]	ÇTA[16]	EPSO[9]	YAPSO[8]	GPSO[19]	KAOA
G <sub>1</sub>	446.4869	474.8066	478.1258	448.1287	459.0753	446.4232	447.1130	<b>445.6783</b>
G <sub>2</sub>	168.6612	178.6363	163.0249	172.8082	185.0675	172.6080	173.0900	<b>175.3452</b>
G <sub>3</sub>	265.0000	262.2089	261.7143	262.5932	264.2094	262.6183	262.0440	<b>262.0004</b>
G <sub>4</sub>	139.4927	134.2826	125.7665	136.9605	138.122	142.7752	141.8220	<b>142.5734</b>
G <sub>5</sub>	164.0036	151.9039	153.7056	168.2031	154.4716	164.6650	165.2370	<b>165.5239</b>
G <sub>6</sub>	91.7465	74.1812	93.7965	87.3304	74.9900	86.3230	86.3411	<b>86.2741</b>
G <sub>7</sub>	217.4282	219.5329	216.3207	214.5632	216.5239	215.8354	216.0012	<b>215.4323</b>
G <sub>Toplam</sub>	1275.3911	1276.030	1276.133	1276.023	1275.940	1275.4131	1275.6471	<b>1276.522</b>
P <sub>Kayıp</sub>	12.3736	13.0217	13.1317	13.0205	12.9422	12.4131	12.6476	<b>12.5393</b>
F <sub>Toplam</sub>	15443.092	15459.00	15461.10	15450.06	15454.89	15443.765	15446.549	<b>15441.783</b>

## 5 SONUÇLAR

Bu çalışmada termik güç santralleri etkisinde olan kayıplı bir güç sistemindeki çevresel ekonomik yük dağıtım problemlerinin çözümü için kaos tabanlı ateşböceği optimizasyon algoritması “KAOA” uygulanmıştır. Çözüm işleminde ağırlık faktörü 0,0’den başlayarak 0,1’lik artımlarla 1,0’a kadar değiştirilmiştir. KAOA ağırlık katsayısının her bir değeri için en iyi sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Çalışma sonucunda elde edilen değerlerin, literatürde verilen değerlere yakın olduğu anlaşılmış ve kısmen daha iyi sonuç elde edilmiştir. Klasik ateşböceği optimizasyon

algoritmasının ekonomik yük dağıtım problemlerinin çözümünü gerçekleştiremediği kısımlarda, KAOA çözüme daha kolay ulaşmıştır. Bunun sonucunda kısıt sayısının fazla olduğu ekonomik yük dağıtım problemlerinin çözümünde KAOA'nın kullanılmasının daha avantajlı olduğu görülmektedir. İleriki çalışmalarda KAOA daha da geliştirilerek çözüm uzayının çok büyük olduğu ve çok fazla matematiksel metodun kullanıldığı kısa ve uzun dönem hidrotermal çevresel ekonomik yük dağıtım problemlerine uygulanacaktır.

## KAYNAKLAR

- [1]Özyön S. Yaşar C. Temurtaş H. Aydın D. (2012). Yasak işletim bölgesi ekonomik güç dağıtım problemlerine geliştirilmiş parçacık sürü optimizasyonu yaklaşımı. Çankaya University Journal of Science and Engineering, Vol. 9, No. 2, 89-106.
- [2]Neyestani M. Farsangi M.M. and Nezamabadi-Pour H. (2010). A modified particle swarm optimization for economic dispatch with non-smooth cost functions. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 23, 1121-1126.
- [3]Labbi Y. and Attous D. (2010). Big bang - big crunch optimization algorithm for economic dispatch with valve-point effect. Journal of Theoretical and Applied Information Technology, Vol. 16, No. 1, 48-56.
- [4]Wang L. and Singh C. (2007). Environmental / economic power dispatch using a fuzzified multi-objective particle swarm optimization algorithm. Electric Power Systems Research, Vol. 77, No. 12, 1654-1664.
- [5]Yaşar C. Temurtaş H. Özyön S. (2010). “Diferansiyel Gelişim Algoritmasının Termik Birimlerden Oluşan Çevresel Ekonomik Güç Dağıtım Problemlerine Uygulanması”, 6. Ulusal Elektrik-Elektronik ve Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu, Elektrik-Kontrol Kitapçığı, (ELECO'10), Bursa, Turkey, 2-5 Aralık 2010, pp. 26-30.
- [6]Yaşar C. Özyön S. Temurtaş H. (2008). “Termik Üretim Birimlerinden Oluşan Çevresel Ekonomik Güç Dağıtım Probleminin Genetik Algoritma Yöntemiyle Çözümü”, 5. Ulusal Elektrik-Elektronik ve Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu, Elektrik-Kontrol Kitapçığı, (ELECO'08), Bursa, Turkey, 26-30 Kasım 2008, pp. 105-109.
- [7]Das D.B. and Patvardhan C. (1998). New multi-objective stochastic search technique for

- economic load dispatch. IEEE Proceedings on Generation Transmission and Distribution, Vol. 145, No. 6, 747-752.
- [8] Yaşar C. Özyön S. (2011). A new hybrid approach for nonconvex economic dispatch problem with valve-point effect. *Energy*, 36(10), 5838-5845.
- [9] Malik T.N. Asar A. Wyne M.F. and Akhtar S. (2010). A new hybrid approach for the solution of nonconvex economic dispatch problem with valve-point effects. *Electric Power Systems Research*, Vol. 80, No. 9, 1128-1136.
- [10] Özyön S. Yaşar C. Temurtaş H. (2011). “Differential Evolution Algorithm Approach to Nonconvex Economic Power Dispatch Problems with Valve Point Effect”, 6<sup>th</sup> International Advanced Technologies Symposium, (IATS’11), Elazığ, Turkey, 16-18 May 2011, pp. 181-186.
- [11] Thitithamrongchai C. and Eua-arporn B. (2007). Self-adaptive differential evolution based optimal power flow for units with non-smooth fuel cost functions. *Journal of Electrical Systems*, 3(2), 88-99.
- [12] Özyön S. Yaşar C. Temurtaş H. (2011). “Particle Swarm Optimization Algorithm for the Solution of Nonconvex Economic Dispatch Problem with Valve Point Effect”, 7<sup>th</sup> International Conference on Electrical and Electronics Engineering, (ELECO’11), Bursa, Turkey, Vol. 1, 01-04 December 2011, pp. 101-105.
- [13] Özyön S. Yaşar C. Özcan G. and Temurtaş H. (2011). “An Artificial Bee Colony Algorithm (ABC) Approach to Nonconvex Economic Power Dispatch Problems with Valve Point Effect”, National Conference on Electrical Electronics and Computer, (FEEB’11), Elazığ, Turkey, pp. 294-299.
- [14] Ongsakul W. and Tantimaporn T. (2006). Optimal power flow by improved evolutionary programming. *Electric Power Components and Systems*, 34(1), 79-95.
- [15] Özyön S. Yaşar C. and Temurtaş H. (2011). Harmony search algorithm applied to environmental economic power dispatch problem. *Çukurova University Journal of the Faculty of Engineering and Architecture*, 26(2), 65-76.
- [16] Karaboğa D. "Yapay Zeka Optimizasyon Algoritmaları", Nobel Yayın Dağıtım, İstanbul, Türkiye, (2014), pp. 32-37.
- [17] Noman N. Iba H. (2008). Differential evolution for economic load dispatch problems.

- Electric Power Systems Research, Vol. 78, No. 8, 1322-1331.
- [18] Hemamalini S. and Simon S.P. (2011). Dynamic economic dispatch using artificial immune system for units with valve-point effect. *Electrical Power and Energy Systems*, 33(4), 868-874.
- [19] Zare K. Haque M.T. and Davoodi E. (2012). Solving non-convex economic dispatch problem with valve point effects using modified group search optimizer method. *Electric Power Systems Research*, 84(1), 83-89.
- [20] Farhat I.A. and El-hawary M.E. (2010). Dynamic adaptive bacterial foraging algorithm for optimum economic dispatch with valve-point effects and wind power. *IET Generation, Transmission and Distribution*, 4(9), 989-999.
- [21] Lukasik S. and Zak S. (2009). "Firefly Algorithm for Continuous Constrained Optimization Tasks", 1<sup>th</sup> International Conference on Computational Collective Intelligence, Semantic Web, Social Networks and Multiagent Systems, Wroclaw, Poland, pp. 97-106.
- [22] Babu B.G. and Kannan M. (2002). Lightning bugs. *Resonance*, 7(9), 49-55.
- [23] Fraga H. (2008). Firefly luminescence: A historical perspective and recent developments. *Journal of Photochemical and Photobiological Sciences*, 7, 146-158.
- [24] Yang X.S. "Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms", Luniver Press, Frome, BA11 6TT, United Kingdom, (2008), pp. 52-57.
- [25] Yang X.S. (2009). "Firefly Algorithms For Multimodal Optimization", Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Stochastic Algorithms: Foundations and Applications - SAGA Sapporo, Japan, pp. 169-178.
- [26] Apostolopoulos T. and Vlachos A. (2011). Application of the firefly algorithm for solving the economic emissions load dispatch problem. *International Journal of Combinatorics*, Hindawi Publishing Corporation, Volume 2011, 1-23.
- [27] Ayan K. and Kılıç U. (2011). "Optimal Reactive Power Flow Solution with Chaotic Artificial Bee Colony", 6<sup>th</sup> International Advanced Technologies Symposium, (IATS'11), Elazığ, Turkey, 16-18 May 2011, pp. 20-24.

# KÜÇÜK GÜÇLÜ RÜZGAR TÜRBİNLERİ İÇİN 3D SEY PROGRAMI İLE IPMS ALTERNATÖRÜN ELEKTROMANYETİK TASARIMI VE ANALİZİ

Engin HÜNER<sup>1\*</sup>, Yekta ATAÖZDEN<sup>2</sup>

[engin.huner@klu.edu.tr](mailto:engin.huner@klu.edu.tr), [ataozdenyekta@gmail.com](mailto:ataozdenyekta@gmail.com)

<sup>1</sup>Kirkkaleli Üniversitesi Teknoloji Fakültesi, Enerji Sistemleri Mühendisliği, Kirkkaleli

<sup>2</sup>Hisar Eğitim Vakfı Okulları, Kemerburgaz İstanbul

## Özet

Yapılan bu çalışmada mikro güce sahip rüzgar türbinleri için içten rotorlu sabit mıknatıslı senkron (İRSMS) alternatörün elektromanyetik tasarımı gerçekleştirilmiştir. Bunun için ANSYS firmasının sonlu elemanlar yöntemini (SEY) kullanan elektromanyetik tasarım programı kullanılmıştır. Tasarlanan İRSMS alternatör radyal akılıdır. Rotor 12 adet mıknatıstan, stator ise 36 adet oluktan oluşmuştur. Rotor mıknatısları yüzey yerleştirmeli yapılmıştır. Tasarımın oluk yapısı ve kutup ölçüleri 3d maxwell programında analiz edilerek optimize edilmiştir. Yapılan manyetik analizler sonucunda oluk açıklığı ve hava aralığı değerleri vuru moment ve ortalama manyetik akı yoğunluğu açısından incelenerek optimum değerleri belirlenmiştir.

**Anahtar Kelime:** Mikro Rüzgar Türbini, Radyal Akılı Alternatör, Sabit Mıknatıs, Elektromanyetik Analiz



## ELECTROMAGNETIC DESIGN AND ANALYSIS OF AN IPMS ALTERNATOR FOR MICRO WIND TURBINE VIA 3D FEA PROGRAM

### Abstract

In this study, the electromagnetic design of the Internal Permanent Magnet Synchronous (IPMS) Alternator of the micro powered wind turbines. For this the electromagnetic design program of ANSYS company that uses finite element method (FEM). The designed IPMS alternator has radial flux. The rotor is made out of 12 magnets while the stator is made out of 36 slots. Rotor magnets are made to stick to the surface. Upon the magnetic analyses, the optimum value was determined after investigating the slot opening and air gaps for the cogging moment and overall magnetic flux.

**Keywords:** Micro Wind Turbine, Radial Flux Alternator, Permanent Magnet, Electromagnetic Analysis

Sorumlu Yazar: Engin HÜNER\* 0288 214 20 83, e-posta: [engin.huner@klu.edu.tr](mailto:engin.huner@klu.edu.tr)

## 1. GİRİŞ

Son yıllarda yüksek manyetik akıya sahip neodyum mıknatıslardaki gelişmeler sabit mıknatıslı alternatörler üzerine yapılan çalışmaları arttırmıştır[1]. Bununla birlikte ekonomik olarak özellikle yurtdışından çok sayıda sabit mıknatıslı küçük güçlü rüzgar türbini ithal edilmiştir. Bunların birçoğu düşük performanslıdır. Ayrıca sabit mıknatıslı radyal akılı alternatörler üzerine de hem prototip hem ticari üretimler görülmektedir. Bu alternatörlerin en büyük avantajı uyartımın sabit mıknatıs tarafından sağlanmasından dolayı verimlerinin klasik yabancı uyartımlı alternatörlere göre daha yüksek olmasıdır[2, 3]. Literatürde prototip çalışmaların yanı sıra güneş enerjisi sistemleri ile hibrid sistemleri oluşturulması ile ilgili olarak da yapılan çalışmalar mevcuttur. Özellikle kırsal bölgeler ya da enerji hatlarına ulaşmanın zor olduğu noktalarda küçük rüzgar türbinleriyle oluşturulan hibrid sistemlerinde önemi vurgulanmaktadır[4]. Dolayısıyla küçük güçlü rüzgar türbinleri için yüksek verimli alternatörlerin geliştirilmesi önem kazanmaktadır. Sabit mıknatıslı alternatör tasarımında SEY kullanan programlar öne çıkmaktadır. SEY kullanan programlardan biri de ANSYS firmasının maxwell programıdır. Sabit mıknatıslı alternatör geliştirilmesi aşamasında birçok çalışmada ANSYS firmasının maxwell programı ile manyetik analizler gerçekleştirilmiştir. Manyetik analizleri maxwell ile gerçekleştirilerek yapılan çalışmalarda programın geçerliliği ortaya konmuştur[5, 6, 7, 8, 9].

Bu çalışmada içten rotorlu sabit mıknatıslı senkron alternatörün manyetik analizleri gerçekleştirilmiştir. Öncelikle küçük güçlü ithal edilmiş bir alternatör baz alınarak manyetik analizleri gerçekleştirilmiştir. Manyetik analizler ışığında hava aralığı ve oluk büyüklükleri optimize edilmiştir. Yapılan bu çalışma sonrası optimize edilmiş değerlere göre İRSMS alternatörün üretiminin yapılması amaçlanarak hem manyetik analiz programının üstünlüğü ortaya konulacak hem de program ile optimize edilen parametrelerin deneysel verileri ispat edilecektir.

## 2. METARYEL VE METOD

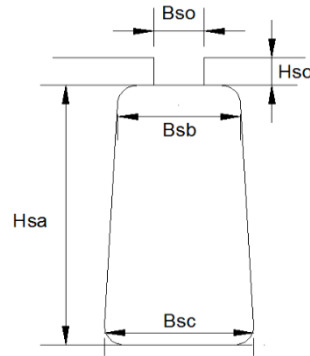
### 2.1.İRSMS Alternatörün Tasarım Parametreleri

İRSMS alternatörün öncelikle mekaniksel parametrelerine göre 3d tasarımı gerçekleştirilmiştir. Tasarımda kullanılan mekaniksel ve elektriksel parametreleri tablo 1 'de verilmiştir.

**Tablo 1.** İRSMS Alternatörün Mekaniksel ve Elektriksel Parametreleri

Stator Ölçüleri		Rotor Ölçüleri	
Dış çap (mm)	134	Dış çap (mm)	84
İç çap (mm)	94	Mil çap (mm)	20
Nüve uzunluk (mm)	14	Hava aralığı (mm)	8
Oluk Sayısı	36	Mıknatis Tipi	Neodyum N35
İletken Çapı (mm)	1	Kutup Sayısı	12
P (watt)	600	Mıknatis ölçüsü (mm)	20 x 14 x 5
Gerilim (V)	12	N (d/dk)	500

İRSMS alternatörün tablo 1.'de verilen mekaniksel ve elektriksel parametrelerinde özellikle hava aralığı çok yüksek bir değer seçilmiştir. Alternatör tasarım parametrelerinin en önemlilerinden biride hava aralığıdır. Bu değer minimum vuru momentini karşılayacak şekilde seçilmesi gerekmektedir. Yoksa tasarlanan alternatörün elektriksel parametreleri zayıf olacaktır. Bu çalışmada değerlendirilen ikinci parametre oluk ağız açıklığıdır. Bu parametrede hava aralığı relüktansını etkileyeceği için vuru momentine etkisi ve hava aralığı manyetik akısına etkisi olacaktır. Bu da elektriksel parametrelerin değişmesine neden olacaktır. Aşağıdaki şekilde İRSMS alternatörün bir oluşunun şekli verilmiştir.



**Şekil 1.** İRSMS Alternatörün Stator Oluğu

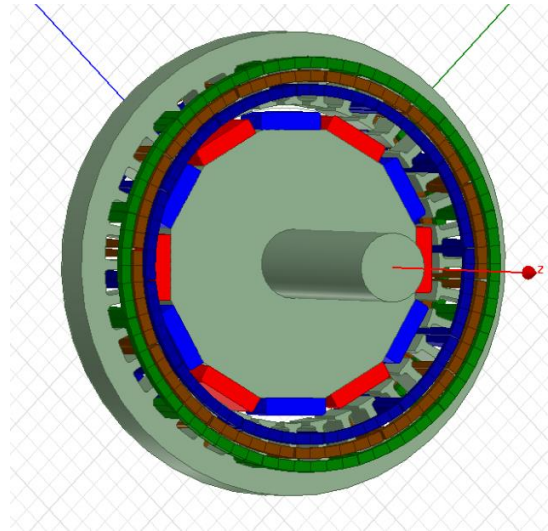
Şekil 1'de verilen oluk yapısında köşe pah kırımalarının yarıçapı 1mm'dir. Bunun dışındaki

diğer parametreleri tablo 2’de verilmiştir. ANSYS maxwell ile yapılan manyetik analizlerde en önemli parametrelerden biri olan Bso’ın değışimi üzerine durulmuştur. Diğer oluk yapısı parametreleri daha çok oluklara yerleştirilecek iletken sayısına etki eden parametrelerdir. Tasarım ve oluk ölçüleri incelendiğinde bu ölçülerin maksimum iletken sayısına göre belirlendiği görülmektedir. Ayrıca ANSYS maxwell programında değışken parametre sayısı arttırıldıkça değışken sayılarının çarpımı kadar program hesaplama yapmaktadır. Dolayısıyla hesaplama yapılan bilgisayar daha yüksek işlem kapasitesine sahip olmalıdır. Bununla birlikte bunun yerine daha önemli parametrelerin birbirleri ile olan ilişkilerini hesaplatmak zaman ve yapılabirlik açısından daha önemlidir.

**Tablo 2.** İRSMS Alternatörün Stator Oluğunun Ölçüleri

Bso (mm)	2.5
Bsb (mm)	6
Bsc (mm)	7.5
Hso (mm)	1.5
Hsa (mm)	14

Tablo 1-2 ve şekil 1’e göre İRSMS alternatörün 3d modeli oluşturulmuştur. Oluşturulan 3d model şekil 2’de verilmiştir.

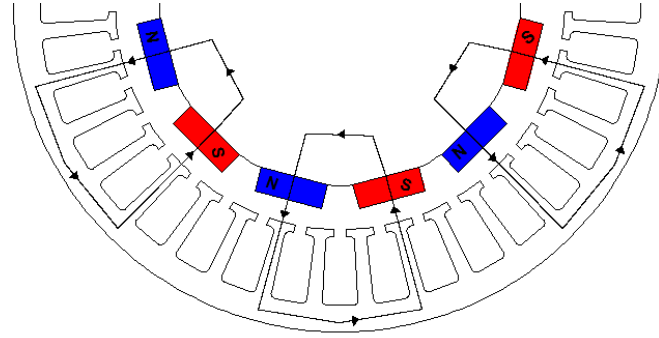


**Şekil 2.** İRSMS Alternatörün 3d Modeli

Şekil 2’de verilen 3d model de mavi-kahverengi-yeşil renkler ile verilen İRSM alternatörün sargılarıdır. Her katta 3 faza ait sargılar mevcuttur. Sargılardan geçen akım yönleri üretilen akımın bir “t” zamanı için sabit alınmıştır.

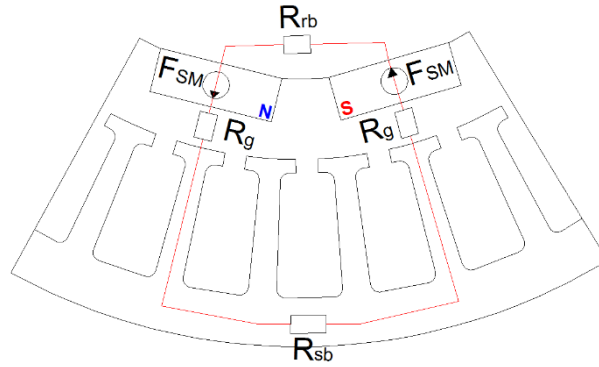
## 2.2.İRSMS Alternatörün Manyetik Eşdeğer Devresi

İçten rotorlu sabit mıknatıslı senkron alternatörde uyarım sargılarının oluşturduğu ana manyetik alanı sabit mıknatıslar yapmaktadır. Manyetik alan dağılımı radyal olarak yani içten dışa ve yarıçapa bağlı olarak bir yol izlemektedir. Şekil 3’de görüldüğü gibi N kutbundan çıkan manyetik akı stator dişine oradan stator boyunduruğuna geçmekte oradan da tekrar S kutbuna girerek rotorun boyunduruğundan devresini tamamlamaktadır.



Şekil 3. İRSMS Alternatörün Manyetik Akı Yolu (1/2 Model)

İRSMS alternatörün manyetik eşdeğer devresi şekil 3 göz önünde tutularak şekil 4’de gösterildiği gibi verilmiştir.



Şekil 4. İRSMS Alternatörün Manyetik Eşdeğer Devresi (N-S Kutbu için)

Şekil 4 manyetik eşdeğer devresine formül 1 ile verilen amper kanunu uygulanarak manyetik alan şiddeti hesaplanır. H manyetik alan şiddetini verir ve birimi AT/m’dir(metre başına amper sarım).  $I_t$  toplam akım değerini l ise toplam uzunluğu ifade eder.

$$\oint H \cdot dl = I_T \quad (1)$$

Manyetik alan şiddeti amper kanununa göre kapalı bir yol boyunca devresini tamamlarsa ve

kaçak akılar göz ardı edilirse formül 2 olarak düzenlenir.

$$H \cdot l_k = N \cdot i \quad (2)$$

Formül 3'de relüktansın genel formülü verilmiştir. Formül 3'de "l" manyetik devrenin uzunluğunu "μ" manyetik geçirgenliği ve "A" kesit alanı ifade etmektedir.

$$\mathcal{R} = \frac{l_k}{\mu \cdot A} = \frac{l_k}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} \quad (3)$$

Sırasıyla formül 4,5,6 ve 7 hava aralığı, rotor boyunduruğu, stator boyunduruğu ve neodyum mıknatısın relüktansını ifade etmektedir.

$$\mathcal{R}_g = \frac{l_g}{\mu_0 \cdot A_g} \quad (4)$$

$$\mathcal{R}_{rb} = \frac{l_{rb}}{\mu_{rb} \cdot \mu_0 \cdot A_{rb}} \quad (5)$$

$$\mathcal{R}_{sb} = \frac{l_{sb}}{\mu_{sb} \cdot \mu_0 \cdot A_{sb}} \quad (6)$$

$$\mathcal{R}_{SM} = \frac{l_{SM}}{\mu_{SM} \cdot \mu_0 \cdot A_{SM}} \quad (7)$$

Formül 8'de manyetik eşdeğer devreye göre hava aralığındaki maksimum manyetik akı yoğunluğu verilmektedir. Mıknatısın manyetik akı yoğunluğu 1,2 Tesla düzeyinde alınırsa eşdeğer relüktansın mıknatıs relüktansına oranından hava aralığındaki maksimum manyetik akı yoğunluğu bulunur. Formül 9'da rotor ve stator boyunduruğundaki demir nüvenin geçirgenliğinin havaya göre çok yüksek olmasından dolayı hesaplamada ihmal edilmiştir. formül 9'a göre hesaplandığında maksimum hava aralığı manyetik akı yoğunluğu 0,996 tesla düzeyindedir.

$$B_{g,mak} = B_r \cdot \left( \frac{2 \cdot \mathcal{R}_{SM}}{2 \mathcal{R}_{SM} + 2 \mathcal{R}_g + \mathcal{R}_{rb} + \mathcal{R}_{sb}} \right) \quad (8)$$

$$B_{g,mak} = B_r \cdot \left( \frac{2 \cdot \mathcal{R}_{SM}}{2 \mathcal{R}_{SM} + 2 \mathcal{R}_g} \right) \quad (9)$$

### 3. SONUÇLAR

İRSMS alternatörün elektromanyetik modeli ANSYS firmasının maxwell programı ile 3 boyutlu olarak oluşturulmuştur. Maxwell programı elektrik makinelerinin manyetik ve transient analizlerinde kullanılmaktadır. Programda öncelikle şekil 2'de verilen 3d model oluşturulmaktadır. İkinci adımda modeldeki her bir malzeme programın kütüphanesinden tanımlanmaktadır. Bir sonraki adımda sargı uyarımları ve analiz ayarlamaları yapılarak analiz başlatılmaktadır.

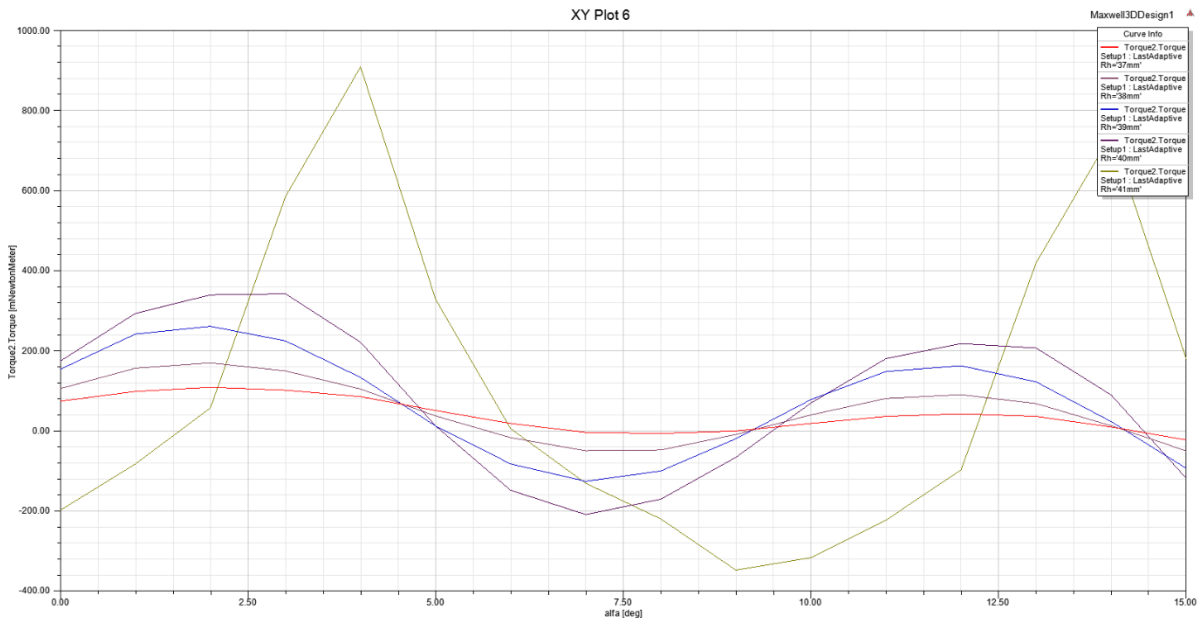
3d Modeli çıkartılan İRSMS alternatör için öncelikle hava aralığının vuru momentine olan

etkisi incelenmiştir. Bunun için modelde tablo 1’de verilen rotor nüvesinin yarıçap değeri “Rh” hava aralığı 1mm’den 5 mm’ye kadar olacak değerler için ayarlanmıştır.

**Tablo 3.** İRSMS Alternatörün Hava Aralığı Değerleri

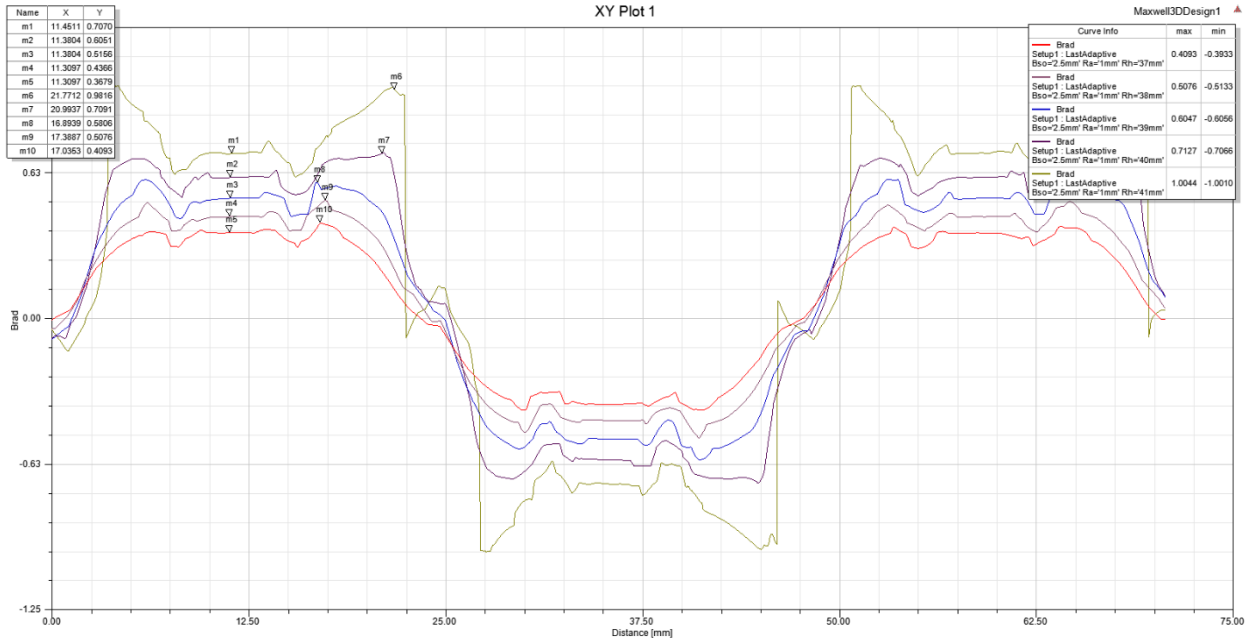
Rotor Nüvesinin Yarıçapı		Hava Aralığı
Rh (mm)	37	5
	38	4
	39	3
	40	2
	41	1

Manyetik analiz sonucunda mile etkiyen vuru mu momenti şekil 5’de verilmiştir. Minimum vuru mu momenti 5mm hava aralığı için elde edilmiştir. 1mm hava aralığında vuru mu momenti değeri 5mm’ye göre 7,6 kat daha fazladır. 2mm hava aralığı için 3 kat, 3mm hava aralığı için 2,33 kat, 4mm hava aralığı için 1,33 kat daha yüksek vuru mu momenti değerine sahiptir. Dolayısıyla hem yüksek hava aralığı manyetik akısı için küçük hava aralığı seçilmeli hem de en uygun vuru mu momentine karar verilmelidir.



**Şekil 5.** İRSMS Alternatörün Vuru mu Momenti

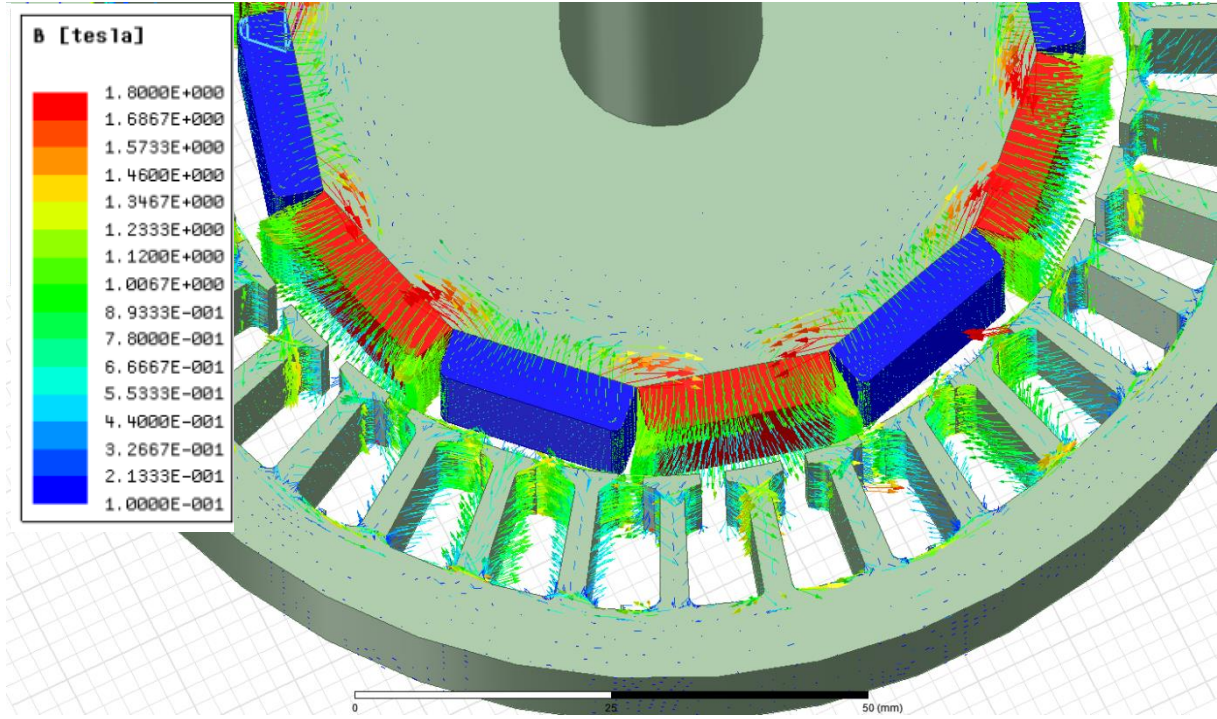
Sırasıyla 1-2-3-4 ve 5mm hava aralığı değerleri için hava aralığındaki manyetik akı yoğunluğu değişimi sonucunda elde edilen veriler şekil 6’da verilmiştir. Her bir hava aralığı için şekil 6 üzerinde maksimum ve minimum noktalar verilmiştir. Görüldüğü gibi 1mm hava aralığı için uç noktalardaki manyetik akı yoğunluğu çok yüksektir. Bu durumda hem vuru mu momentinin değerinin yükselmesine hem de stator nüvesinin uç kısımlarda doyuma giderek performansının düşmesine neden olmaktadır. Özellikle şekil 6 üzerinde verilen m1,m2,m3,m4,m5 noktaları ortalama manyetik akı değeri için bizi bilgilendirir. Tam değerleri bulmak için maxwell programının 3d manyetik analiz sonuçları üzerinden programın araçları ile hesap yapılmaktadır.



Şekil 6. İRSMS Alternatörün Kutup Altında Manyetik Akı Dağılımı

İRSMS alternatörün nüve yüzeyinde ortalama manyetik akı değerinin hesabı için manyetik analizler sonucunda program araçları ile ortalama manyetik akı değeri hesaplatılır. Şekil 7’de 5mm için manyetik akı dağılımı 3d olarak verilmiştir.





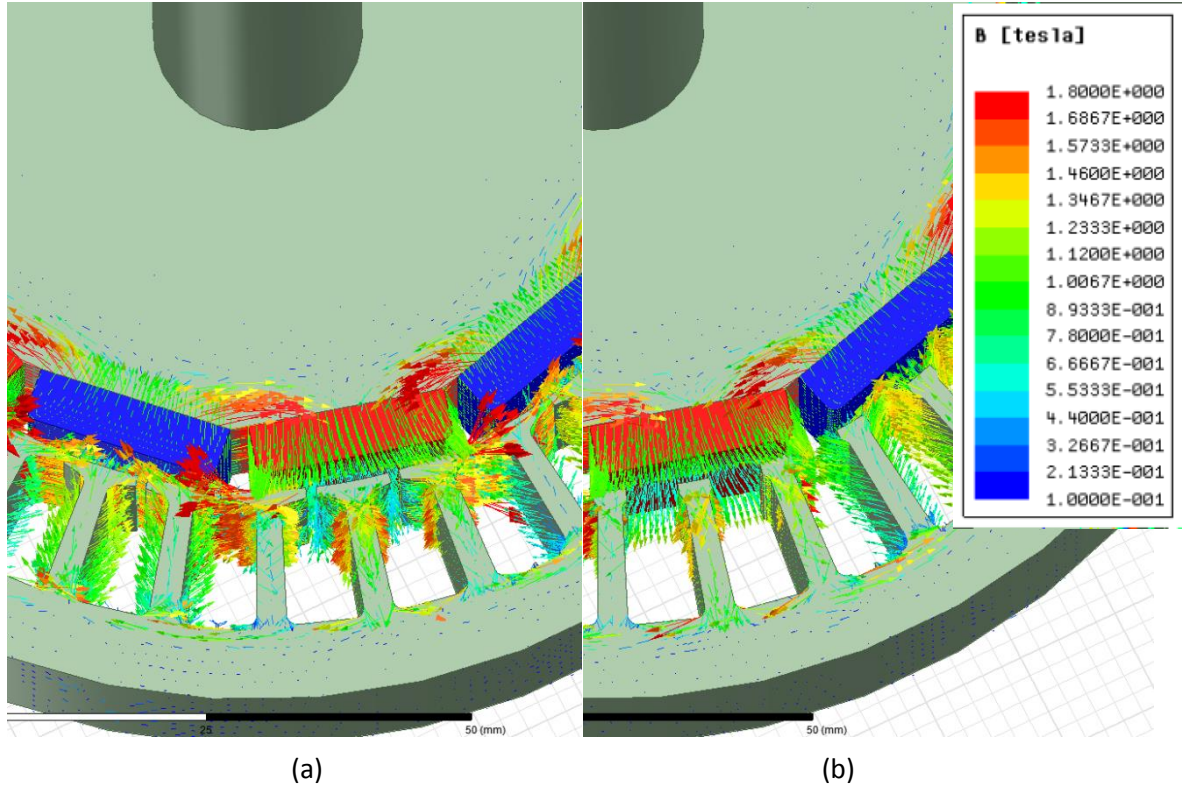
Şekil 7. İRSMS Alternatörün Manyetik Akı Dağılımı (5mm Hava Aralığı İçin)

Tablo 4’de 1,2,3,4 ve 5mm için ortalama manyetik akı değerleri verilmiştir. 1mm hava aralığında 5mm’ye göre ortalama manyetik akı değeri 1,9 katıdır. 2mm hava aralığı için 5mm’ye göre manyetik akı değeri 1,6 katıdır. 3mm hava aralığı için 5mm’ye göre manyetik akı değeri 1,36 katıdır.

**Tablo 4.** İRSMS Alternatörün Ortalama Manyetik Akı Değerleri

Hava Aralığı (mm)	Ortalama Manyetik Akı Değeri (Tesla)
1	0.617943293055892
2	0.51835160883215
3	0.44716183314597
4	0.377622725161037
5	0.324529376279862

Yapılan manyetik analizlerde alınan diğer bir değişken oluk açıklığıdır. Oluk açıklığı nüve yüzeyindeki relüktansı değiştireceği için manyetik analizde değişken bir parametre olarak alınmıştır. Oluk aralığı 1-1,5-2-2,5-3-3,5-4-4,5 ve 5mm olarak alınmıştır. Her bir değer için stator nüvesinin manyetik akı yoğunluğu hesaplatılmıştır.



**Şekil 8.** İRSMS Alternatörün Oluk Açıklığı-Manyetik Akı Dağılımı

a)Bso=1mm, b)Bso=5mm

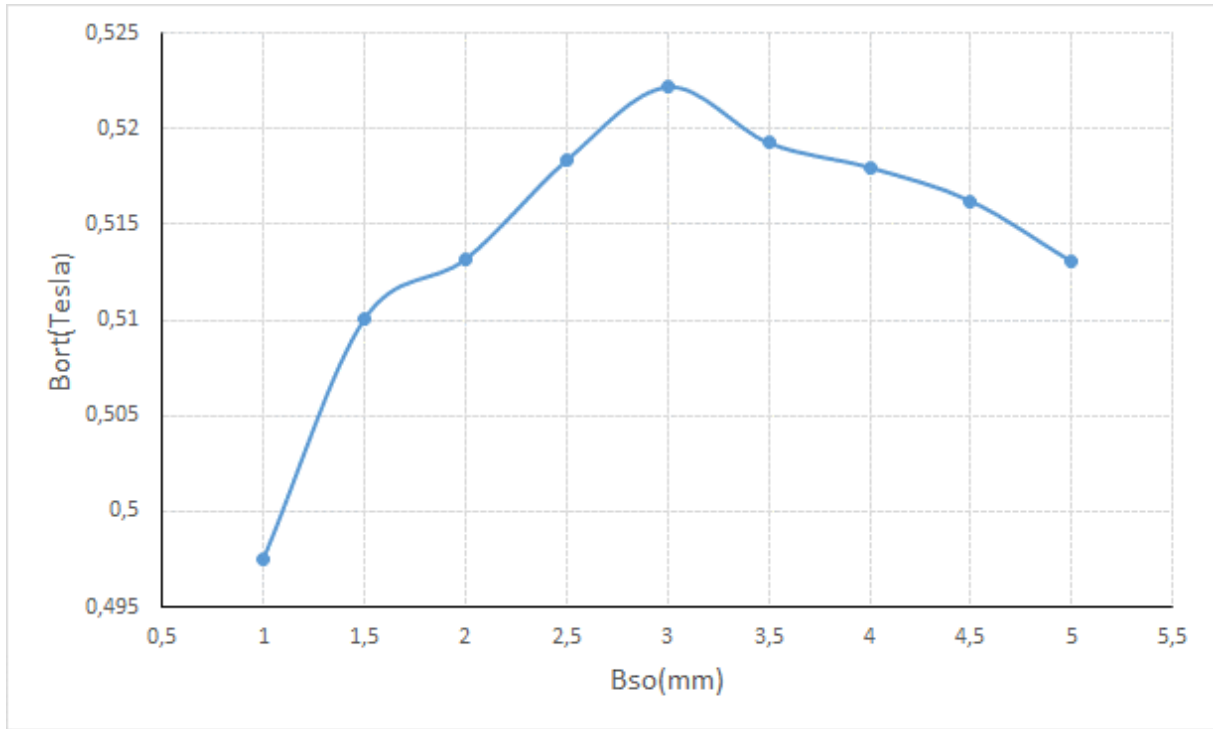
Şekil 8’de Bso=1mm ve Bso=5mm oluk açıklığı için statordaki manyetik akı yoğunluğu dağılımı verilmiştir. Bso=1mm’den 5mm’ye kadar olan ortalama manyetik akı yoğunluğu dağılımlarının değerleri ise tablo 5’de verilmiştir. Tablo 5 incelendiğinde en uygun değer 3mm olduğu görülmektedir.

**Tablo 5.** İRSMS Alternatörün Oluk Açıklığı-Manyetik Akı Dağılımı Değerleri

Oluk Açıklığı Bso (mm)	Ortalama Manyetik Akı Yoğunluğu (Tesla)
1	0.497513625608596
1,5	0.510057308784103
2	0.513190107864249
2,5	0.51835160883215
3	0.522184362871834
3,5	0.519270694550592

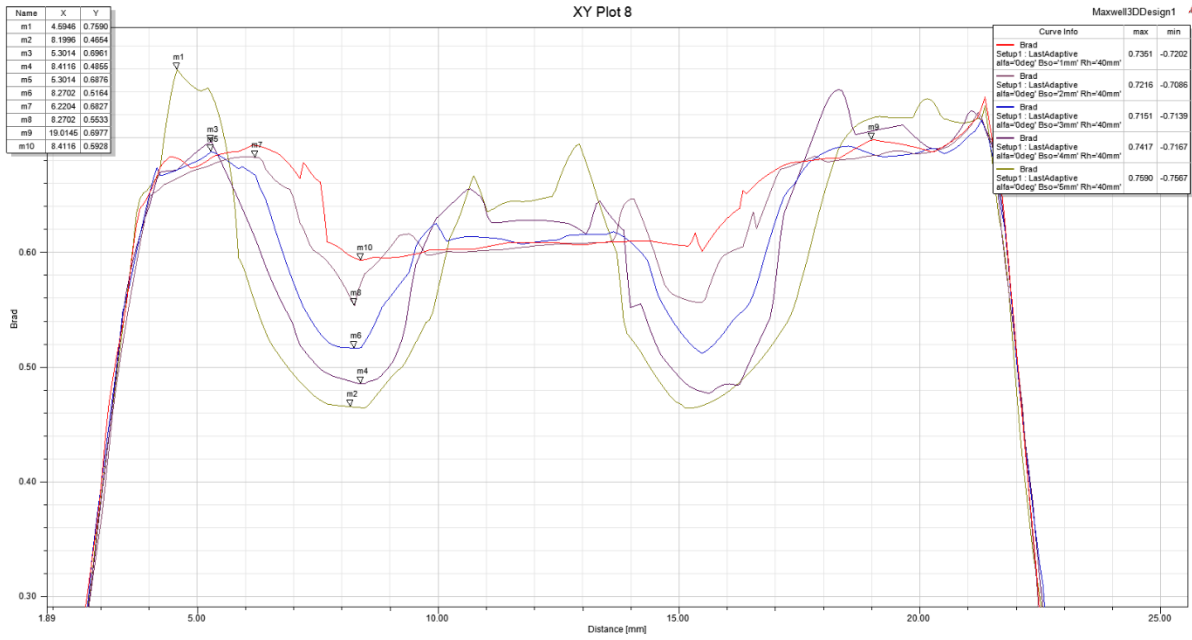
4	0.517979880605255
4,5	0.516228182818103
5	0.513051163726427

Tablo 5'e g6re oluk açıklığına bağlı olarak hesaplanan değerler Şekil 9'daki gibi grafiksel olarak ifade edildiğinde de en y6ksek ortalama manyetik akı yoğunluğu değeri için 3mm'lik oluk aıklığıının uygun olduğu g6r6lmektedir.



**Şekil 9.** İRSMS Alternat6r6n Oluk Açıklığı-Manyetik Akı Dağılımı Eğrisi

Stator n6vesinin oluk açıklığına bağlı olarak bir kutup altında ki manyetik alan dağılımı Şekil 10'da verilmiştir. Şekil 10'da g6r6ld6ėu gibi oluk açıklığı arttıkça rel6ktansın deėiŐimine bağlı olarak manyetik akı yoğunluğu da değişmektedir. Bu da vurutu momentini arttırıcı bir etkidir. Manyetik analizde 1-2-3-4 ve 5mm oluk açıklıkları alınmıştır. Her bir oluk açıklığı değerinde maksimum ve minimum noktaların farkı en d6Őuk oluk aıklığıının değeri baz alınarak karşılaştırılmıştır. 5mm açıklıkta 2,79 kat, 4mm açıklıkta 2 kat, 3mm açıklıkta 1,63 kat ve 2 mm açıklıkta 1,23 kat fark vardır.



Şekil 10. İRSMS Alternatörün Kutup Altında Oluk Açıklığına Bağlı Manyetik Akı Dağılımı

#### 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada piyasada üretilen bir İRSMS alternatör için manyetik analizler gerçekleştirilerek parametreler optimize edilmiştir. Bunun için sırasıyla hava aralığına bağlı vurutu momenti değerleri, hava aralığına bağlı olarak kutup altında manyetik akı yoğunluğu değişimi, hava aralığına bağlı olarak ortalama manyetik akı dağılımı, oluk açıklığına bağlı olarak manyetik akı yoğunluğu dağılımı ve oluk açıklığına bağlı olarak kutup altındaki manyetik akı yoğunluğu değişimi analiz edilmiştir. ANSYS maxwell ile yapılan manyetik analizler sonucunda vurutu momenti için 2mm ve 3mm hava aralığı 5mm ye göre sırasıyla 3 kat ve 2,33 kat daha fazladır. Stator nüvesindeki ortalama manyetik akı yoğunluğu değeri 2mm ve 3mm için 5mm'ye göre sırasıyla 1,6 kat ve 1,36 kat daha fazladır. Farklı oluk açıklığı değerlerinde en yüksek ortalama manyetik akı yoğunluğu 3mm'de 0,5221 tesla olarak analiz edilmiştir. Farklı oluk açıklıklarında maksimum ve minimum değerler arasındaki farkın en düşük oluk açıklığına göre 2mm ve 3mm'de sırasıyla 1,23 kat ve 1,63 kat olarak analiz edilmiştir. Dolayısıyla hava aralığı açısından 2mm ve oluk aralığı açısından vurutu momentini de bir miktar katkı sağlamak için iki değerlerin orta noktası olan 2,5mm değeri seçilerek optimizasyon sağlanır.

## KAYNAKLAR

- [1] Sezenoğlu, C., Balıkçı, A., Aydın, F., Küçük Rüzgar Türbinleri için Eksenel Akılı Sürekli Mıknatıslı Üreteç Uygulaması Eksenel Akılı Sürekli Mıknatıslı Makineler Tasarım Analitik Model, Elektrik Mühendisleri Odası EMO.
- [2] Kaynaklı, M., Uysal, A., Koçak, E., Bayır, R., Rüzgar Enerjisinden Elektrik Üretiminde Kullanılan Sabit Mıknatıslı Alternatörlerin Arızalarının Tespiti İçin Bilgisayar Destekli Test Standı Üretimi, Rüzgar Enerjisi Sempozyumu, Vol.2, 95-99, 2009.
- [3] Onur, C., Önbilgin, G., Yel Enerjisi Dönüşüm Sistemleri İçin Uygun Generatör Türlerinin Değerlendirilmesi, EMO, 2008.
- [4] Sinha, S., Chandel, S.S., Prospects of solar photovoltaic – micro-wind based hybrid power systems in western Himalayan state of Himachal Pradesh in India, Energy Convers. Manag., 1340–1351, 2015.
- [5] Kurt, Ü., Önbilgin, G., Eksenel Akılı Sürekli Mıknatıslı Senkron Makina Tasarımında Taguchi Yönteminin Kullanılması, Elektrik Elektronik Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu, Vol.8, 6–9, 2006.
- [6] Upadhyay, P.R., Rajagopal, K.R., FE analysis and computer-aided design of a sandwiched axial-flux permanent magnet brushless DC motor, *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol.42, No.10, 3401–3403, 2006.
- [7] Hüner, E., Aküner, M.C., Demir, U., A new approach in application and design of toroidal axial-flux permanent magnet open-slotted NN type (TAFPMOS-NN) motor, Teh. Vjesn. - Tech. Gaz., Vol.22, No.5, 1193–1199, 2015.
- [8] Ayçiçek, E., Bekiroğlu, N., Şenol, İ., Optimization of Rotor Structure For Providing Minimum Cogging Moment By Using Open Slot Method In Axial Flux Permanent Magnet Motors, Journal of Engineering and Natural Sciences, No.212, 392–401, 2012.
- [9] Huner, E., Akuner, M.C., Axial-flux synchronous machines compared with different stator structures for use in working, Prz. Elektrotechniczny, Vol.88, No.11, 174–177, 2012.

## NOTES ON ESPECIAL CONTINUED FRACTION EXPANSIONS AND REAL QUADRATIC NUMBER FIELDS

Özen ÖZER

*Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts,  
Kırklareli University, 39100, Kırklareli - TURKEY  
[ozenozer39@gmail.com](mailto:ozenozer39@gmail.com)*

### Abstract

The primary purpose of this paper is to classify real quadratic fields  $Q(\sqrt{d})$  which include the form of specific continued fraction expansion of integral basis element  $w_d$  for arbitrary period length  $\ell = \ell(d)$  where  $d \equiv 2,3 \pmod{4}$  is a square free positive integers.

Furthermore, the present paper deals with determining new certain parametric formulas of fundamental unit  $\varepsilon_d = (t_d + u_d \sqrt{d})/2 > 1$  and Yokoi's  $d$ -invariants  $n_d, m_d$  for such real quadratic fields. All results are also supported by several numerical tabular forms.

**Key Words:** Quadratic Fields, Continued Fractions, Fundamental Units.

**2010 AMS Subject Classification:** 11R11, 11A55, 11R27.

### Özet

Bu makalenin asıl amacı,  $d \equiv 2,3 \pmod{4}$  kare çarpansız pozitif tamsayılar olmak üzere keyfi  $\ell = \ell(d)$  periyod uzunluğu için tamlik taban elemanı olan  $w_d$  nin özel bir sürekli kesre açılımındaki formu içeren  $Q(\sqrt{d})$  reel kuadratik sayı cisimlerini sınıflandırmaktır.

Ayrıca bu çalışma, ilgili reel kuadratik sayı cisimleri için Yokoi'nin  $d$ -invariantları olan  $n_d, m_d$  ile  $\varepsilon_d = (t_d + u_d \sqrt{d})/2 > 1$  temel biriminin kesin parametrik formüllerinin belirlenmesi ile ilgilenmektedir. Tüm sonuçlar bir takım nümerik tablolar ile de desteklenmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Kuadratik Cisimler, Sürekli Kesirler, Temel Birimler.

## 1. INTRODUCTION

Quadratic fields have applications in different areas of mathematics such as quadratic forms, algebraic geometry, diophantine equations, algebraic number theory, and even cryptography.

The Unit Theorem for real quadratic fields says that every unit in the integer ring of a quadratic field is given in terms of the fundamental unit of the quadratic field. Thus, determining the fundamental units of quadratic fields is of great importance.

Let  $k = Q(\sqrt{d})$  be a real quadratic number field where  $d > 0$  is a positive square free integer. Integral basis element is denoted by  $w_d = \sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{\ell(d)-1}, 2a_0}]$  and  $\ell(d)$  is the period length in simple continued fraction expansion of algebraic integer  $w_d$  for  $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ . The fundamental unit  $\varepsilon_d$  of real quadratic number field is also denoted by  $\varepsilon_d = (t_d + u_d \sqrt{d})/2 > 1$  where  $N(\varepsilon_d) = (-1)^{\ell(d)}$ .

Furthermore, Yokoi's invariants are expressed by  $m_d = \left\lfloor \frac{u_d^2}{t_d} \right\rfloor$  and  $n_d = \left\lfloor \frac{t_d}{u_d^2} \right\rfloor$  where  $\lfloor x \rfloor$  represents the greatest integer not greater than  $x$ . The sequence  $\{Y_n\}$  is also special sequence which will be defined in Section 2.

By using coefficients of fundamental unit H.Yokoi defined two significant invariants such as  $m_d, n_d$  for class number problem and the solutions of Pell equation in [9].

In [7], Tomita described explicitly form of the fundamental units of the real quadratic fields by using Fibonacci sequence and continued fraction. He also gave some results for the continued fraction expansion of  $w_d$  where  $d \equiv 1 \pmod{4}$  for  $\ell(d) = 3$  in [6].

Determining of some certain fundamental units  $\varepsilon_d = (t_d + u_d \sqrt{d})/2 > 1$  of  $k = Q(\sqrt{d})$  was studied by R.Sasaki and R.A.Mollin ([4], [1]). Moreover, please see [3],[5] and [8] for more details about continued fraction expansions.

We will investigate the continued fraction expansions which have partial quotients elements as 5s (except the last digit of the period, which is always  $2\lfloor\sqrt{d}\rfloor$  for  $w_d = \sqrt{d}$ ) with a given period length. Although there are infinitely many values of  $d$  having all 5s in the symmetric part of period of integral basis element, we will classify them according to

arbitrary period length.

We will also determine the general forms of fundamental units  $\varepsilon_d$  and  $t_d, u_d$  coefficients of fundamental units  $\varepsilon_d = (t_d + u_d \sqrt{d})/2 > 1$  in the terms of  $\{Y_n\}$  as new formulizations which have been unknown yet for such real quadratic fields. By using results, the fundamental unit, continued fraction expansions and Yokoi's invariants will be calculated more easily for such  $Q(\sqrt{d})$ .

## 2. PRELIMINARIES

We need following definitions and lemmas which will be used in our main results for the section 3.

**Definition 2.1.**  $\{Y_i\}$  is said to be a sequence defined by the recurrence relation

$$Y_i = 5Y_{i-1} + Y_{i-2}$$

with seed values  $Y_0 = 0$  and  $Y_1 = 1$ . We can calculate some values of the terms of the sequence as follows:

$Y_2 = 5Y_1 + Y_0 = 5$ ,  $Y_3 = 5Y_2 + Y_1 = 25 + 1 = 26$ ,  $Y_4 = 5Y_3 + Y_2 = 130 + 5 = 135$ ,  
 $Y_5 = 5Y_4 + Y_3 = 5.135 + 26 = 701$ ,  $Y_6 = 5Y_5 + Y_4 = 3640$ ,  $Y_7 = 18901$ ,  $Y_8 = 98145$ ,  
 $Y_9 = 509626$ ,  $Y_{10} = 2646275$ ,  $Y_{11} = 13741001$ ,  $Y_{12} = 71351280$ ,  $Y_{13} = 370497401$ ,  
... This sequence plays an important role in this paper to describe our lemmas and main results.

**Lemma 2.1.** For a square free positive integer  $d$  congruent to 2,3 modulo 4, we put  $w_d = \sqrt{d}$ ,  $a_0 = \llbracket \sqrt{d} \rrbracket$  into the  $w_R = a_0 + w_d$ . Then  $w_d \notin R(d)$ , but  $w_R \in R(d)$  holds.

Moreover, for the period  $l = l(d)$  of  $w_R$ , we get

$$w_R = [2a_0, a_1, a_2, \dots, a_{l(d)-1}] \text{ and } w_d = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{l(d)-1}, 2a_0}].$$

Furthermore, let  $w_R = \frac{w_R^{P_l+P_{l-1}}}{w_R^{Q_l+Q_{l-1}}} = [2a_0, a_1, a_2, \dots, a_{l(d)-1}, w_R]$  be a modular automorphism of  $w_R$ . Then the fundamental unit  $\varepsilon_d$  of  $Q(\sqrt{d})$  is given by the following formula:

$$\varepsilon_d = \frac{t_d + u_d \sqrt{d}}{2} = (a_0 + \sqrt{d})Q_{l(d)} + Q_{l(d)-1} > 1$$

$$t_d = 2a_0 \cdot Q_{l(d)} + 2Q_{l(d)-1} \text{ and } u_d = 2Q_{l(d)}$$

where  $Q_i$  is determined by  $Q_0 = 0$ ,  $Q_1 = 1$  and  $Q_{i+1} = a_i Q_i + Q_{i-1}$ , ( $i \geq 1$ ).



**Proof.** Proof is omitted in [6].

**Lemma 2.2.** Let  $d \equiv 2,3(mod4)$  be the square free positive integer and  $w_d$  has got partial constant elements repeated 5s in the case of period  $l = l(d)$ . If  $a_0 = \llbracket \sqrt{d} \rrbracket$  denote the integer part of  $w_d = \sqrt{d}$  for  $d \equiv 2,3(mod4)$ , then we have continued fraction expansion

$$w_d = \sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{\ell(d)-1}, a_{\ell(d)}}] = [a_0; \overline{5, 5, \dots, 5, 2a_0}]$$

for quadratic irrational numbers and  $w_R = a_0 + \sqrt{d} = a_0 + [a_0; \overline{5, 5, \dots, 5, 2a_0}] = [\overline{2a_0, 5, \dots, 5}]$  for reduced quadratic irrational numbers.

Furthermore,  $A_k = a_0 Y_{k+1} + Y_k$  and  $B_k = Y_{k+1}$  are determined in the continued fraction expansions where  $\{A_k\}$  and  $\{B_k\}$  are two sequences defined by :

$$A_{-2} = 0, A_{-1} = 1, A_k = a_k A_{k-1} + A_{k-2} \quad (\text{for } 0 \leq k \leq l-1)$$

$$B_{-2} = 1, B_{-1} = 0, B_k = a_k B_{k-1} + B_{k-2} \quad (\text{for } 0 \leq k \leq l-1)$$

and

$$A_l = 2a_0^2 Y_l + 3a_0 Y_{l-1} + Y_{l-2} \quad (\text{for } k = l(d))$$

$$B_l = 2a_0 Y_l + Y_{l-1} \quad (\text{for } k = l(d))$$

where  $l = l(d)$  is period length of  $w_d = \sqrt{d}$ . Also,  $C_j = \frac{A_j}{B_j}$  is the  $j^{th}$  convergent in the continued fraction expansion of  $\sqrt{d}$ .

Moreover, in the continued fraction  $[b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots] = [2a_0, 5, 5, \dots, 5, \dots]$ ,

$P_j = 2a_0 Y_j + Y_{j-1}$  and  $Q_j = Y_j$  are obtained where  $\{P_j\}$  and  $\{Q_j\}$  are two sequences defined by

$$P_{-1} = 0, P_0 = 1, P_{j+1} = b_{j+1} P_j + P_{j-1}$$

$$Q_{-1} = 1, Q_0 = 0, Q_{j+1} = b_{j+1} Q_j + Q_{j-1}$$

for  $j \geq 0$ .

**Proof.** We can prove by using mathematical induction. Using the following table which

$k$	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$a_k$			$a_0$	5	5	5	5	...
$A_k$	0	1	$(a_0)$ $a_0 Y_1 + Y_0$	$(5a_0 + 1)$ $a_0 Y_2 + Y_1$	$(26 a_0 + 5)$ $a_0 Y_3 + Y_2$	$(135 a_0 + 26)$ $a_0 Y_4 + Y_3$	$(701 a_0 + 135)$ $a_0 Y_5 + Y_4$	...
$B_k$	1	0 $Y_0$	1 $Y_1$	5 $Y_2$	26 $Y_3$	135 $Y_4$	701 $Y_5$	...

**Table 2.1.**

(Convergent of  $[ a_0; \overline{5,5, \dots, 5, 2a_0} ]$  for  $l = l(d)$ )

includes values of  $A_k, B_k$  and  $a_k$ , we can easily say that this is true for  $k = 0$ .

Now, we assume that the result true for  $k < i$ . Using the defined relations for  $\{Y_i\}$  sequence, we obtained ( $a_i = 5$  for  $1 \leq i \leq l - 1$ )

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= a_{k+1}A_k + A_{k-1} = 5(a_0 Y_{k+1} + Y_k) + (a_0 Y_k + Y_{k-1}) \\ &= a_0(5Y_{k+1} + Y_k) + (5Y_k + Y_{k-1}) \\ &= a_0 Y_{k+2} + Y_{k+1} \end{aligned}$$

$$B_{k+1} = a_{k+1}B_k + B_{k-1} = 5Y_{k+1} + Y_k = Y_{k+2}$$

Moreover, since  $a_l = 2a_0$  we get the following result :

$$A_l = 2a_0^2 Y_l + 3a_0 Y_{l-1} + Y_{l-2}$$

$$B_l = 2a_0 Y_l + Y_{l-1} \quad (\text{for } k = l(d))$$

Furthermore, in the continued fraction  $[b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots] = [2a_0, 5, 5, \dots, 5, \dots]$ , we have following table:

$j$	-1	0	1	2	3	4	5
$b_j$			$2 a_0$	5	5	5	...
$P_j$	0	1	$(2 a_0)$ $2 a_0 Y_1 + Y_0$	$(10 a_0 + 1)$ $2 a_0 Y_2 + Y_1$	$(52 a_0 + 5)$ $2 a_0 Y_3 + Y_2$	$(270 a_0 + 26)$ $2 a_0 Y_4 + Y_3$	...
$Q_j$	1	0 $Y_0$	1 $Y_1$	5 $Y_2$	26 $Y_3$	135 $Y_4$	...

**Table 2.2.** Convergent of  $[ 2a_0, 5, 5, \dots, 5, \dots ]$

The Table 2.2 completes proof.

**Definition 2.2.** Let  $c_n = ac_{n-1} + bc_{n-2}$  be the recurrence relation of  $\{c_n\}$  sequence where  $a, b$  are real numbers. The polynomial is called as a characteristic equation is written in the form of

$$r^2 - ar - b = 0$$

The solutions will depend on the nature of the roots of the characteristic equation for recurrence relation.

By using the definition, we find characteristic equation as

$$r^2 - 5r - 1 = 0$$

for  $\{Y_k\}$  sequence. So, we can write each element of sequence as follows:

$$Y_k = \frac{1}{\sqrt{29}} \left[ \left( \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \right)^k - \left( \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \right)^k \right]$$

for  $k \geq 0$ .

**Lemma 2.3.** Let  $\{Y_k\}$  be the sequence defined as in Definition 2.1 and Definition 2.2. Then, we have

$$Y_k > \begin{cases} \frac{2}{5\sqrt{29} + 29} \left( \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \right)^k & ; \text{if } k \text{ is even integer} \\ \frac{1}{\sqrt{29}} \left( \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \right)^k & ; \text{if } k \text{ is odd integer} \end{cases}$$

for  $k \geq 1$ .

**Proof.** As a result of the Lemma 2.2 this proof can be obtained easily.

**Remark 2.1.** Let  $\{Y_n\}$  be the sequence defined as in Definition 2.1. Then, we state the following:

$$Y_n \equiv \begin{cases} 0(\text{mod}4) & ; n \equiv 0(\text{mod}6) \\ 1(\text{mod}4) & ; n \equiv 1,2,5(\text{mod}6) \\ 2(\text{mod}4) & ; n \equiv 3(\text{mod}6) \\ 3(\text{mod}4) & ; n \equiv 4(\text{mod}6) \end{cases}$$

for  $n \geq 0$ .

### 3. MAIN THEOREMS AND RESULTS

The followings are our main theorem and results with the notation of the preliminaries.

**Main Theorem.** Let  $d$  be square free positive integer and  $\ell$  be a positive integer satisfying that  $3 \nmid \ell, \ell \geq 2$ . Suppose that the parametrization of  $d$  is

$$d = \left( \frac{5 + (2\delta + 1)Y_\ell}{2} \right)^2 + (2\delta + 1)Y_{\ell-1} + 1$$

where  $\delta \geq 0$  is a positive integer. Then following conditions hold:

- (1) If  $\ell \equiv 1(\text{mod}6)$  and  $\delta$  is even positive integer then  $d \equiv 2(\text{mod}4)$
- (2) If  $\ell \equiv 2(\text{mod}6)$  and  $\delta$  is even positive integer then  $d \equiv 3(\text{mod}4)$
- (3) If  $\ell \equiv 4(\text{mod}6)$  and  $\delta$  is even positive integer then  $d \equiv 3(\text{mod}4)$
- (4) If  $\ell \equiv 5(\text{mod}6)$  and  $\delta$  is odd positive integer then  $d \equiv 2(\text{mod}4)$

$$\text{In } Q(\sqrt{d}) \text{ real quadratic fields, we have } w_d = \left[ \frac{5+(2\delta+1)Y_\ell}{2}; \underbrace{5, 5, \dots, 5}_{\ell-1}, 5 + (2\delta + 1)Y_\ell \right]$$

with  $\ell = \ell(d)$  for  $d \equiv 2, 3(\text{mod}4)$ .

Additionally, we get the fundamental unit  $\varepsilon_d$  and coefficients of fundamental unit  $t_d, u_d$  as follows:

$$\varepsilon_d = \left( \frac{5+(2\delta+1)Y_\ell}{2} + \sqrt{d} \right) Y_\ell + Y_{\ell-1},$$

$$t_d = (2\delta + 1)Y_\ell^2 + 5Y_\ell + 2Y_{\ell-1} \quad \text{and} \quad u_d = 2Y_\ell$$

**Proof.** We say that  $d \notin Z_+$  by using Remark 2.1 for all  $\ell \equiv 0, 3(\text{mod}6)$ . So, we will assume that  $3 \nmid \ell, \ell \geq 2$  in order to get  $d \in Z_+$ . First of all, we should show that four conditions hold as the followings:

- (1) if  $\ell \equiv 1(\text{mod}6)$  holds, then  $Y_\ell \equiv 1(\text{mod}4)$  and  $Y_{\ell-1} \equiv 0(\text{mod}4)$  hold. By substituting these values into parametrization of  $d$  and considering  $\delta$  is even positive integer, we obtain  $d \equiv 2(\text{mod}4)$ .

- (2) If  $\ell \equiv 2(mod6)$  satisfies, then  $Y_\ell \equiv 1(mod4)$  and  $Y_{\ell-1} \equiv 1(mod4)$  satisfy. By considering  $\delta$  is even positive substituting these values into parametrization of  $d$  and rearranging, we have  $d \equiv 3(mod4)$ .
- (3) If  $\ell \equiv 4(mod6)$  and  $\delta$  is even positive integer, then  $Y_\ell \equiv 3(mod4)$  and  $Y_{\ell-1} \equiv 2(mod4)$  hold and also by substituting these values into parametrization of  $d$ , then  $d \equiv 3(mod4)$  holds.
- (4) If  $\ell \equiv 5(mod6)$  and  $\delta$  is odd positive integer then we get  $Y_\ell \equiv 1(mod4)$  and  $Y_{\ell-1} \equiv 3(mod4)$ . By substituting these values into parametrization of  $d$  and rearranging, we have  $d \equiv 2(mod4)$ .

So, conditions are satisfied. By using Lemma 2.2 we have

$$w_R = \left( \frac{5+(2\delta+1)Y_\ell}{2} \right) + \left[ \frac{5+(2\delta+1)Y_\ell}{2}; \underbrace{5, 5, \dots, 5}_{\ell-1}, 5 + (2\delta + 1)Y_\ell \right]$$

$$\Rightarrow w_R = (5 + (2\delta + 1)Y_\ell) + \frac{1}{5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{w_R}}}}}}$$

$$= (5 + (2\delta + 1)Y_\ell) + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5} + \frac{1}{w_R}$$

By using Lemma 2.1 and Lemma 2.2, we get

$$w_R = (5 + (2\delta + 1)Y_\ell) + \frac{Y_{\ell-1}w_R + Y_{\ell-2}}{Y_\ell w_R + Y_{\ell-1}}$$

Using Definition 2.1 and put  $Y_{\ell+1} + Y_{\ell-1} = 5Y_\ell + 2Y_{\ell-1}$  equation into the above equality, we obtain

$$w_R^2 - (5 + (2\delta + 1)Y_\ell)w_R - (1 + (2\delta + 1)Y_{\ell-1}) = 0$$

This implies that  $w_R = \left( \frac{5+(2\delta+1)Y_\ell}{2} \right) + \sqrt{d}$  since  $w_R > 0$ . If we consider Lemma 2.2, we get

$$\sqrt{d} = \left[ \frac{5+(2\delta+1)Y_\ell}{2}; \underbrace{5, 5, \dots, 5}_{\ell-1}, 5 + (2\delta + 1)Y_\ell \right] \text{ and } \ell = \ell(d).$$

Hence,  $w_d = \left[ \frac{5+(2\delta+1)Y_\ell}{2}; \underbrace{5, 5, \dots, 5}_{\ell-1}, 5 + (2\delta + 1)Y_\ell \right]$  holds.

Now, we can determine  $\varepsilon_d, t_d$  and  $u_d$  using Lemma 2.1 as follows:

$$Q_0 = 0 = Y_0, \quad Q_1 = 1 = Y_1, \quad Q_2 = a_1 \cdot Q_1 + Q_0 \Rightarrow Q_2 = 5 = Y_2,$$

$$Q_3 = a_2 Q_2 + Q_1 = 5Y_2 + Y_1 = Y_3, \quad Q_4 = Y_4, \quad \dots$$

So, this implies that  $Q_i = Y_i$  by using mathematical induction for  $\forall i \geq 0$ . If we substitute these values of sequence into the  $\varepsilon_d = \frac{t_d + u_d \sqrt{d}}{2} = (a_0 + \sqrt{d})Q_{l(d)} + Q_{l(d)-1} > 1$  and rearranged, we get

$$\varepsilon_d = \left( \frac{5 + (2\delta + 1)Y_\ell}{2} + \sqrt{d} \right) Y_\ell + Y_{\ell-1},$$

$$t_d = (2\delta + 1)Y_\ell^2 + 5Y_\ell + 2Y_{\ell-1} \quad \text{and} \quad u_d = 2Y_\ell$$

We can obtain following theorems and conclusions from Main Theorem.

**Theorem 3.1.** Let  $d$  be square free positive integer and  $\ell$  be a positive integer satisfying that  $\ell \not\equiv 5 \pmod{6}$ ,  $3 \nmid \ell$  and  $\ell \geq 2$ . Suppose that parametrization of  $d$  is

$$d = \left( \frac{5 + Y_\ell}{2} \right)^2 + Y_{\ell-1} + 1$$

Then, we have  $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$  and  $w_d = \left[ \frac{5 + Y_\ell}{2}; \overbrace{5, 5, \dots, 5}^{\ell-1}, 5 + Y_\ell \right]$  with  $\ell = \ell(d)$ .

Additionally, we get the fundamental unit  $\varepsilon_d$ , coefficients of fundamental unit  $t_d, u_d$  and Yokoi's invariant  $m_d$  as follows:

$$\varepsilon_d = \left( \frac{5 + Y_\ell}{2} + \sqrt{d} \right) Y_\ell + Y_{\ell-1},$$

$$t_d = Y_\ell^2 + Y_{\ell+1} + Y_{\ell-1} \quad \text{and} \quad u_d = 2Y_\ell$$

$$m_d = 3$$

**Proof.** This theorem is obtained from main theorem by taking  $\delta = 0$ . Assume that  $\ell \not\equiv 5 \pmod{6}$ ,  $3 \nmid \ell$  and  $\ell \geq 2$ . By using this assumption and Remark 2.1, we obtain that

if  $\ell \equiv 1, 2 \pmod{6}$ , we have  $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$  and if  $\ell \equiv 4 \pmod{6}$ , we get  $d \equiv 3 \pmod{4}$ .

By using Lemma 2.2 we get

$$w_R = \left( \frac{5 + Y_\ell}{2} \right) + \left[ \frac{5 + Y_\ell}{2}; \overbrace{5, 5, \dots, 5}^{\ell-1}, 5 + Y_\ell \right]$$

$$\Rightarrow w_R = (5 + Y_\ell) + \frac{1}{5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{w_R}}}}} = (5 + Y_\ell) + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5} + \frac{1}{w_R}$$

By using Lemma 2.1 and Lemma 2.3, we get

$$w_R = (5 + Y_\ell) + \frac{Y_{\ell-1}w_R + Y_{\ell-2}}{Y_\ell w_R + Y_{\ell-1}}$$

Using Definition 2.1 and put  $Y_{\ell+1} + Y_{\ell-1} = 5Y_\ell + 2Y_{\ell-1}$  equation into the above equality, we obtain

$$w_R^2 - (5 + Y_\ell)w_R - (1 + Y_{\ell-1}) = 0$$

This implies that  $w_R = \left(\frac{5+Y_\ell}{2}\right) + \sqrt{d}$  since  $w_R > 0$ . If we consider Lemma 2.2 we get

$$\sqrt{d} = \left[ \frac{5+Y_\ell}{2}; \overline{5, 5, \dots, 5, 5 + Y_\ell} \right] \text{ and } \ell = \ell(d). \text{ Hence, } w_d = \left[ \frac{5+Y_\ell}{2}; \overbrace{5, 5, \dots, 5}^{\ell-1}, 5 + Y_\ell \right] \text{ holds.}$$

Now, we can determine  $\varepsilon_d, t_d$  and  $u_d$  using Lemma 2.1. We obtain  $Q_i = Y_i$  for  $\forall i \geq 0$ . If we substitute these values of sequence into the  $\varepsilon_d = \frac{t_d + u_d \sqrt{d}}{2} = (a_0 + \sqrt{d})Q_{\ell(d)} + Q_{\ell(d)-1} > 1$  and rearranged, we get

$$\varepsilon_d = \left(\frac{5+Y_\ell}{2} + \sqrt{d}\right) Y_\ell + Y_{\ell-1},$$

$$t_d = Y_\ell^2 + Y_{\ell+1} + Y_{\ell-1} \quad \text{and} \quad u_d = 2Y_\ell$$

Finally, we know that  $m_d$  is defined as  $m_d = \left[ \frac{u_d^2}{t_d} \right]$  from H.Yokoi's reference. If we substitute  $t_d$  and  $u_d$  into the  $m_d$ , then we get

$$m_d = \left[ \frac{u_d^2}{t_d} \right] = \left[ \frac{4Y_\ell^2}{Y_\ell^2 + Y_{\ell+1} + Y_{\ell-1}} \right]$$

We can't calculate  $m_d = \left[ \frac{u_d^2}{t_d} \right]$  due to  $d$  is not square free positive integer for  $\ell = 2$ . From the assumption and by considering  $Y_\ell$  is increasing sequence, we get,

$$4 > 4 \left( \frac{Y_\ell^2}{Y_\ell^2 + Y_{\ell+1} + Y_{\ell-1}} \right) > 3,846$$

for  $\ell \geq 4$ . Therefore, we obtain  $m_d = \left\lfloor \left\lceil \frac{4Y_\ell^2}{Y_\ell^2 + Y_{\ell+1} + Y_{\ell-1}} \right\rceil \right\rfloor = 3$  for  $\ell \geq 4$  due to definition of  $m_d$ .

This completes the proof of Theorem 3.1.

**Corollary 3.1.** Let  $d$  be the square free positive integer positive integer satisfying the conditions in Theorem 3.1. We state the following Table 3.1 where fundamental unit is  $\varepsilon_d$ , integral basis element is  $w_d$  and Yokoi's invariant is  $m_d$  for  $4 \leq \ell(d) \leq 13$ . (In this table, we rule out  $\ell(d) = 2, 7$  since  $d$  is not a square free positive integer in these periods).

$d$	$\ell(d)$	$m_d$	$w_d$	$\varepsilon_d$
4927	4	3	$[70; \overline{5,5,5,140}]$	$9476 + 135\sqrt{4927}$
2408374527	8	3	$[49075; \overline{5,5,5,5,5,5,5,98150}]$	$4816484776 + 98145\sqrt{2408374527}$
1750699969227	10	3	$[1323140; \overline{5,5,5,5,5,5,5,5,5,2646280}]$	$3501392813126 + 2646275\sqrt{1750699969227}$
34317082034533490	13	3	$[185248703; \overline{5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,370497406}]$	$68634163071472183 + 370497401\sqrt{34317082034533490}$

**Table 3.1.**

**Theorem 3.2.** Let  $d$  be the square free positive integer and  $\ell$  be a positive integer satisfying that  $\ell \equiv 5 \pmod{6}$  and  $\ell > 1$ . We assume that parametrization of  $d$  is

$$d = \left(\frac{5 + 3Y_\ell}{2}\right)^2 + 3Y_{\ell-1} + 1$$

Then, we get  $d \equiv 2 \pmod{4}$  and  $w_d = \left[\frac{5+3Y_\ell}{2}; \overline{\underbrace{5,5, \dots, 5}_{\ell-1}, 5 + 3Y_\ell}\right]$  and  $\ell = \ell(d)$ .

Moreover, we have following equalities :

$$\varepsilon_d = \left(\left(\frac{5+3Y_\ell}{2}\right)Y_\ell + Y_{\ell-1}\right) + Y_\ell\sqrt{d}$$

$$t_d = 3Y_\ell^2 + 5Y_\ell + 2Y_{\ell-1} \quad \text{and} \quad u_d = 2Y_\ell$$

$$m_d = 1$$

for  $\varepsilon_d$ ,  $t_d, u_d$  and Yokoi's invariant  $m_d$ .



**Proof.** We can create this theorem by substituting  $\delta = 1$  in Main Theorem. If we suppose that  $\ell \equiv 5(mod6)$  and  $\ell > 1$ , then we have  $Y_\ell \equiv 1(mod4)$  and  $Y_{\ell-1} \equiv 3(mod4)$ . Also, if we put these equivalents into  $d = \left(\frac{5+3Y_\ell}{2}\right)^2 + 3Y_{\ell-1} + 1$  then we get  $d \equiv 2(mod4)$ . By using Lemma 2.2, we have

$$w_R = (5 + 3Y_\ell) + \frac{Y_{\ell-1}w_R + Y_{\ell-2}}{Y_\ell w_R + Y_{\ell-1}}$$

We obtain the proof in a similar way of proof of Theorem 3.1. By using Lemma 2.1, Lemma 2.3 and Definition 2.1, we get  $w_R = \left(\frac{5+3Y_\ell}{2}\right) + \sqrt{d}$  since  $w_R > 0$ .

If we consider Lemma 2.2 we have

$$w_d = \sqrt{d} = \left[ \frac{5+3Y_\ell}{2}; \underbrace{5, 5, \dots, 5}_{\ell-1}, 5 + 3Y_\ell \right] \text{ and } \ell = \ell(d).$$

$\varepsilon_d, t_d$  and  $u_d$  are determined as follows using Lemma 2.1. It is seen that  $Q_i = Y_i$  holds for  $\forall i \geq 1$ . If we substitute these values of sequence into the

$$\varepsilon_d = \frac{t_d + u_d \sqrt{d}}{2} = (a_0 + \sqrt{d})Q_{l(d)} + Q_{l(d)-1} > 1 \text{ and rearranged, we have}$$

$$\varepsilon_d = \left( \left( \frac{3Y_\ell + 5}{2} \right) Y_\ell + Y_{\ell-1} \right) + Y_\ell \sqrt{d}$$

$$t_d = 3Y_\ell^2 + 5Y_\ell + 2Y_{\ell-1} \text{ and } u_d = 2Y_\ell.$$

If we substitute  $t_d$  and  $u_d$  into the  $m_d$  and rearranged, then we get

$$m_d = \left\| \frac{u_d^2}{t_d} \right\| = \left\| \frac{4Y_\ell^2}{3Y_\ell^2 + Y_{\ell-1} + Y_{\ell+1}} \right\|$$

From the assumption and since  $Y_\ell$  is increasing sequence, we have

$$2 > 4 \left( \frac{Y_\ell^2}{3Y_\ell^2 + Y_{\ell-1} + Y_{\ell+1}} \right) > 1,329$$

where  $\ell \equiv 5(mod6), \ell > 1$ . Therefore, we obtain  $m_d = \left\| \frac{4Y_\ell^2}{3Y_\ell^2 + Y_{\ell-1} + Y_{\ell+1}} \right\| = 1$  for  $\ell \equiv 5(mod6), \ell \geq 5$  which completes the proof of Theorem 3.2.

**Corollary 3.2.** Let  $d$  be the square free positive integer satisfying the conditions in Theorem 3.2. We state the following Table 3.2 where fundamental unit is  $\varepsilon_d$ , integral basis element is  $w_d$  and Yokoi's invariant is  $m_d$  for  $1 < \ell(d) \leq 17$ .

$d$	$\ell(d)$	$m_d$	$w_d$	$\varepsilon_d$
1111322	5	1	$[1054; \overline{5,5,5,5,2108}]$	$738989 + 701\sqrt{1111322}$
424834105080842	11	1	$[20611504; \overline{5,5, \dots, 5, 41223008}]$	$283222699721779 + 13741001\sqrt{424834105080842}$
163237535004482301880562	17	1	$[404026651354; \overline{5,5, \dots, 5, 808053302708}]$	$108825023335829727323369 + 269351100901\sqrt{163237535004482301880562}$

**Table 3.2.**

**Theorem 3.3.** Let  $d$  be square free positive integer and  $\ell$  be a positive integer satisfying that  $\ell \not\equiv 5 \pmod{6}$ ,  $3 \nmid \ell$  and  $\ell \geq 2$ . Suppose that the parametrization of  $d$  is

$$d = \left(\frac{5Y_\ell + 5}{2}\right)^2 + 5Y_{\ell-1} + 1$$

Then, we have  $d \equiv 2,3 \pmod{4}$  and  $w_d = \left[\frac{5Y_\ell+5}{2}; \overline{\underbrace{5,5, \dots, 5}_{\ell-1}, 5 + 5Y_\ell}\right]$  with  $\ell = \ell(d)$ .

Additionally, we get the fundamental unit  $\varepsilon_d$ , coefficients of fundamental unit  $t_d, u_d$  and Yokoi's invariant  $n_d$  as follows:

$$\varepsilon_d = \left(\frac{5Y_\ell+5}{2} + \sqrt{d}\right) Y_\ell + Y_{\ell-1},$$

$$t_d = 5Y_\ell^2 + Y_{\ell+1} + Y_{\ell-1} \quad \text{and} \quad u_d = 2Y_\ell$$

$$n_d = 1$$

**Proof.** We have this theorem for  $\delta = 2$  by using Main Theorem. Suppose that  $\ell \not\equiv 5 \pmod{6}$ ,  $3 \nmid \ell$  and  $\ell \geq 2$ . By using this assumption and Remark 2.1 we can find some results as follows:

- (i) if  $\ell \equiv 1,2 \pmod{6}$ , then  $Y_\ell \equiv 1 \pmod{4}$  as well as either  $Y_{\ell-1} \equiv 1 \pmod{4}$  or  $Y_{\ell-1} \equiv 0 \pmod{4}$  holds. if  $Y_\ell \equiv 1 \pmod{4}$  and  $Y_{\ell-1} \equiv 1 \pmod{4}$ , then  $d \equiv 3 \pmod{4}$  otherwise  $d \equiv 2 \pmod{4}$  holds. So, we have  $d \equiv 2,3 \pmod{4}$ .

- (ii) if  $\ell \equiv 4 \pmod{6}$ , then  $Y_\ell \equiv 3 \pmod{4}$  and  $Y_{\ell-1} \equiv 2 \pmod{4}$  hold. By substituting these values into parametrization of  $d$  and rearranging, we have  $d \equiv 3 \pmod{4}$ .

Hence,  $d \equiv 2,3 \pmod{4}$  holds.

We get

$$w_R = (5 + 5Y_\ell) + \frac{Y_{\ell-1}w_R + Y_{\ell-2}}{Y_\ell w_R + Y_{\ell-1}}$$

using Lemma 2.1 and Lemma 2.2 with the properties of continued fraction expansion. Using Definition 2.1 we have

$$w_R^2 - (5 + 5Y_\ell)w_R - (1 + 5Y_{\ell-1}) = 0$$

This implies that  $w_R = \left(\frac{5+5Y_\ell}{2}\right) + \sqrt{d}$  since  $w_R > 0$ .

Hence,  $w_d = \left[\frac{5Y_\ell+5}{2}; \underbrace{5,5, \dots, 5}_{\ell-1}, 5 + 5Y_\ell\right]$  holds.

By using  $Q_i = Y_i$  for  $\forall i \geq 1$  into the  $\varepsilon_d = \frac{t_d + u_d \sqrt{d}}{2} = (a_0 + \sqrt{d})Q_{l(d)} + Q_{l(d)-1} > 1$  and rearranged, we obtain

$$\varepsilon_d = \left(\frac{5Y_\ell+5}{2} + \sqrt{d}\right)Y_\ell + Y_{\ell-1},$$

$$t_d = 5Y_\ell^2 + Y_{\ell+1} + Y_{\ell-1} \quad \text{and} \quad u_d = 2Y_\ell$$

Finally, we know that  $n_d$  is defined as  $n_d = \left[\left[\frac{t_d}{u_d^2}\right]\right]$ . If we substitute  $t_d$  and  $u_d$  into the  $n_d$ , then we get

$$\begin{aligned} n_d &= \left[\left[\frac{t_d}{u_d^2}\right]\right] = \left[\left[\frac{5Y_\ell^2 + Y_{\ell+1} + Y_{\ell-1}}{4Y_\ell^2}\right]\right] \\ &= 1 + \left[\left[\frac{1}{4} + \frac{Y_{\ell+1}}{4Y_\ell^2} + \frac{Y_{\ell-1}}{4Y_\ell^2}\right]\right] \end{aligned}$$

From the assumption, since  $Y_\ell$  is increasing sequence, we calculate following inequality for  $\ell \geq 2$

$$0 < \frac{Y_\ell^2 + Y_{\ell+1} + Y_{\ell-1}}{4Y_\ell^2} \leq 0,520$$

Hence, we obtain  $n_d = 1 + \left\lceil \left\lfloor \frac{1}{4} + \frac{Y_{\ell+1}}{4Y_\ell^2} + \frac{Y_{\ell-1}}{4Y_\ell^2} \right\rfloor \right\rceil = 1$  for  $\ell \geq 2$  due to definition of  $n_d$ . This completes the proof of Theorem 3.3.

**Corollary 3.3.** Let  $d$  be the square free positive integer positive integer satisfying the conditions in Theorem 3.3. We state the following Table 3.3 where fundamental unit is  $\varepsilon_d$ , integral basis element is  $w_d$  and and Yokoi's invariant is  $n_d$  for  $2 \leq \ell(d) \leq 13$ . (In the following table, we rule out  $\ell(d) = 4, 10$  since  $d$  is not a square free positive integer in these periods).

$d$	$\ell(d)$	$n_d$	$w_d$	$\varepsilon_d$
231	2	1	[15; $\overline{5,30}$ ]	$76+5\sqrt{231}$
2233053226	7	1	[47255; $\overline{5,5,5,5,5,94510}$ ]	$893170395+18901\sqrt{2233053226}$
60204077731	8	1	[245365; $\overline{5,5,5,5,5,5,5,5490730}$ ]	$24081366826+98145\sqrt{60204077731}$
857927030911441426	13	1	[926243505; $\overline{5,5, \dots, 5, 1852487010}$ ]	$343170811366981785 + 370497401\sqrt{857927030911441426}$

**Table 3.3.**

## REFERENCES

- [1] R.A. Mollin, "Quadratics", Boca Rato, F.L, CRC Press, 1996.
- [2] C.D. Olds, "Continued Functions", New York: Random House, 1963.
- [3] O. Perron, "Die Lehre von den Kettenbrüchen", New York: Chelsea, Reprint from Teubner Leipzig, 1950.
- [4] R. Sasaki, "A characterization of certain real quadratic fields", Proc. Japan Acad, 62, Ser. A, 1986, no. 3, 97-100.

- [5] W. Sierpinski, “Elementary Theory of Numbers”, Warsaw: *Monografi Matematyczne*, 1964.
- [6] K. Tomita, “Explicit representation of fundamental units of some quadratic fields”, *Proc. Japan Acad.*, 71, Ser. A, 1995, no. 2, 41-43.
- [7] K. Tomita and K. Yamamuro, “Lower bounds for fundamental units of real quadratic fields”, *Nagoya Math. J*, Vol.166, 2002, 29-37.
- [8] K.S. Williams and N. Buck, “Comparison of the lengths of the continued fractions of  $\sqrt{D}$  and  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{D})$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120 no. 4, 1994, 995-1002.
- [9] H. Yokoi, “New invariants and class number problem in real quadratic fields”, *Nagoya Math. J*, 132, 1993, 175-197.

**KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ DERGİSİ**  
**KIRKLARELİ UNIVERSITY JOURNAL of ENGINEERING and SCIENCE**

Kırklareli Üniversitesi Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisinde fen ve mühendislik alanında özgün araştırma makaleleri, derlemeler, kısa makaleler, teknik not, vaka takdimleri, kitap eleştirileri ve bilimsel nitelikli editöre mektuplar yayınlanır. Dergi Aralık ve Haziran aylarında olmak üzere yılda iki kez yayınlanır. Yayınlanmak üzere gönderilen eserlerin başka bir yerde yayınlanmamış veya yayınlanmak üzere gönderilmemiş olması gerekmektedir. Derginin yayın dili Türkçe ve İngilizcedir. Dergide yayınlanacak eserlerin her türlü sorumluluğu yazar/larına aittir. Makaleler, dergi e-posta adresine (fbdergi@klu.edu.tr) gönderilmelidir. Makalenin hakem incelemesi için kabul edilmesi durumunda, Telif Hakkı Devir Formu tüm yazarlarca imzalanarak editörlüğe gönderilmelidir.

Dergiye gönderilen makaleler, öncelikle Dergi Yayın Kurulu tarafından bilimsel içerik ve şekil bakımından ön incelemeye tabii tutulur. Dergi Yayın Kurulu, yayınlanabilecek nitelikte bulmadığı veya yazım kurallarına uygun hazırlanmayan makaleleri hakemlere göndermeden red kararı verme hakkına sahiptir. Değerlendirmeye alınabilecek olan makaleler, incelenmek üzere iki ayrı hakeme gönderir. Dergi Yayın Kurulu, hakem raporlarını dikkate alarak makalelerin yayınlanmak üzere kabul edilip edilmemesine karar verir.

**Yazım Kuralları / Instructions**

- 1.** Yazı tümüyle (metin, tablolar, denklemler, çizimler) bilgisayarda düzenlenmeli ve baskıya hazır biçimde teslim edilmelidir. Yazı, A4 (210 x 297 mm) boyutlu kâğıda, Word ortamında, 12 punto (ana başlık 14 punto) Times New Roman font kullanılarak, bir buçuk aralıkla ve her iki yana yaslı olarak yazılmalı, kâğıdın tüm kenarlarından 25 mm boşluk bırakılmalıdır.
- 2.** Çizimler ve tablolarla birlikte, makaleler 25 sayfadan, teknik notlar 6 sayfadan daha uzun olmamalıdır.
- 3.** Yazı, elektronik ortamda (CD veya e-posta eki) dergi e-posta adresine veya dergi yazışma adresine gönderilmelidir.
- 4.** Metin yalın bir dil ve anlatımla yazılmalı, Türkçe yazım kurallarına uygun olmalı, üçüncü tekil şahıs ve edilgen fiiller kullanılmalı, devrik cümleler içermemelidir.
- 5.** Bölümler (i) özet ve anahtar kelimeler, (ii) abstract and keywords (İngilizce başlık, özet ve anahtar kelimeler), (iii) ana metin (giriş, materyal ve metod, sonuçlar vb.), (iv) semboller, (v) teşekkür (gerekliyse) ve (vi) kaynaklar sırası içinde düzenlenmelidir.
- 6.** Başlık kısa ve açık olmalı, içeriği yansıtabilmelidir. Başlık büyük harfle ortalanarak yazılmalıdır.
- 7.** Yazar/ların adları kısaltmasız, başlığın altına yan yana, soyadlar büyük harfle ortalanarak 11 punto boyutunda yazılmalıdır. Yazar isimlerinden sonra virgül ve adres belirtmek için üst simge olarak rakam kullanılmalıdır. Yazışmaların yapılacağı sorumlu yazar isminde mutlaka üst simge yıldız (\*) sembolü olmalıdır. Adres/ler tam yazılmalı, kısaltma yapılmamalıdır. Sorumlu yazarın e-mail adresi dipnot olarak bulunmalıdır. Yazar adları yazılırken herhangi bir akademik unvan belirtilmemelidir.
- 8.** Özet (ve Abstract) çalışmanın amacını, kapsamını, yöntemini ve ulaşılan sonuçları kısaca tanımlamalı ve 200 kelimeyi aşmamalıdır. En az üç tane anahtar kelime verilmelidir. Anahtar kelimeler, zorunlu olmadıkça başlıktakilerin tekrarı olmamalıdır. Başlık, Özet ve İngilizce başlıklı Abstract birinci sayfaya sığdırılmalı, birinci sayfanın altında on satır boş bırakılmalı ve ana metin ikinci sayfadan başlatılmalıdır.
- 9.** Bölüm ve alt bölüm başlıkları numaralanmalıdır (TS1212).
- 10.** Semboller uluslararası kullanıma uygun seçilmeli; her bir sembol ve varsa kısaltmalar ilk kullanıldığı yerde tanımlanmalı, ayrıca metnin sonunda (Kaynaklardan önce) tüm semboller alfabetik sıra ile (önce Latin, sonra Yunan alfabesi) listelenmelidir.
- 11.** Matematiksel ifadeler (denklemler) Word ortamında "Equation Editör" kullanılarak yazılmalıdır. Metin içerisinde geçen denklemler numaralanmalı ve bu numaralar satır sonunda parantez içinde gösterilmelidir.

**12.** Tablo dışında kalan fotoğraf, resim, çizim ve grafik gibi gösterimler “Şekil” olarak verilmelidir. Resim, şekil ve grafikler net ve ofset baskı tekniğine uygun olmalıdır. Her tablo ve şeklin metin içindeki yeri belirtilmelidir. Tüm tablo ve şekiller makale boyunca sırasıyla numaralandırılmalı (Tablo 1., Tablo 2., Şekil 1., Şekil 2. gibi) başlık ve açıklama içermelidir. Grafik ve şekiller basılı sayfa boyutları dikkate alınarak çizilmelidir. Şekillerin sıra numaraları ve başlıkları şeklin altına, tabloların ki ise tablonun üstüne yazılmalıdır.

**13.** Yazılarda yalnızca SI birimleri kullanılmalıdır.

**14.** Teşekkür olabildiğince kısa olmalı, çalışmaya katkısı ve desteği bulunan kişi ve kuruluşlar belirtilmelidir.

**15.** Dergimize yayınlanmak üzere gönderilen makaleler benzerlik kontrol programı ile kontrol edilecektir. Benzerlik raporu ilgili yayın danışma kurulu üyesine kontrol etmesi için gönderilecektir. Benzerlik raporu sonucu yüksek çıkan makaleler için yazardan düzenleme talep edilir.

**16.** Kaynaklar metinde köşeli parantez ([ ]) içinde numaralanmalı ve kaynaklar listesinde metin içinde veriliş sırasına uygun biçimde belirtilmelidir. Yayınlanmamış bilgiler kaynak olarak verilmemelidir. Ancak tamamlanmış ve jüriden geçmiş tezler ve DOI numarası olan makaleler kaynak olarak verilebilir.

Kaynaklarda şu bilgiler verilmelidir:

*Kaynak makale ise:* Yazarın soyadı, adının baş harfi, diğer yazarlar, makalenin tam başlığı, derginin adı, cilt, sayı, başlama ve bitiş sayfaları, basıldığı yıl.

*Örnek:* [1] Naghdi, P. M., Kalnins, A., On Vibrations of Elastic Spherical Shells. J. Appl. Mech., C 29, S 65-72, 1962.

*Kaynak kitap ise:* Yazarın soyadı, adının baş harfi, diğer yazarlar, kitabın adı, cilt numarası, varsa editörü, yayınlandığı yer, yayınlandığı yıl.

*Örnek:* [2] Kraus. H., Thin Elastic Shells, New York. Wiley, 1967.

*Kaynak bildiri ise:* Yazarın soyadı, adının baş harfi, diğer yazarlar, bildirinin adı, konferansın adı, yapıldığı yer, başlama ve bitiş sayfaları, yıl.

*Örnek:* [3] Cappleman. O., Communication in the Studio, FIDE'98 International Conference on First Year Architectural Design Education Proceedings, Faculty of Architecture İstanbul Technical University, Cilt V, S 48-54, 1998

*Kaynak tez ise:* Yazarın soyadı, adının baş harfi, tezin adı, derecesi, sunulduğu kurum, başlama ve bitiş sayfaları, yıl.

*Örnek:* [4] Özşahin. B., Yalıtım Kalıplı Donatılı Beton Duvarlı Binaların Yapımsal ve Ekonomik Uygulanabilirliği, Doktora Tezi, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, S 5-9, 2011

*Kaynak rapor ise:* Yazarın soyadı, adının baş harfi, diğer yazarlar, raporun adı, türü, numarası, kuruluşun adı, yayınlandığı yer, yıl.

*Örnek:* [5] Makarewicz. J.C., Lewis. T., Bertram. P., Epilimnetic Phytoplankton and Zooplankton Biomass and Species Composition in Lake Michigan, 1983-1982, IL EPA 905-R-95-009, U.S EPA Great Lakes Natioanl Program, Chicago, 1995

*Kaynak internet ise:* Eğer bir bilgi herhangi bir internet sayfasından alınmış ise (internetten alınan ve dergilerde yayınlanan çalışmalar hariç)

Yazarın soyadı, adının baş harfi, diğer yazarlar, çalışmanın adı, internet sitesinin adı ve adresi, internet sitesine erişim tarihi

*Örnek:* [6] Pieper. C. M., Introduction to Activity Based Costing, ATechnical Bulletin From ABC Technologies, www.abctech.com 1998, Erişim tarihi: 12.10.2014

**KIRKLARELİ UNIVERSITY JOURNAL of ENGINEERING and SCIENCE**  
**KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ DERGİSİ**

Kirklareli University Journal of Engineering and Science welcome materials for publications as original research papers, short communications, technical notes, case reports, book/software reviews and scientific letter to editors. Kirklareli University Journal of Engineering and Science is published two issues per year in June and December. Manuscripts submitted to the journal are only accepted if they have not been or will not be published and should not be under review elsewhere. Manuscript's language is English and Turkish. All responsibility of the studies belongs to the authors. Studies should be prepared in accordance with international scientific ethics rules. Studies must be sent to journal mail address (fbedergi@klu.edu.tr).

For the studies accepted for publication in our journal, copyright transfer form signed must be sent to the journal editorial. Papers are firstly checked for their suitability for technical and journal's style. The manuscripts that do not suit journal's standards or not suitable correspond to the scope journal are refused with unexplained reason. Manuscripts that are found suitable for peer review will be assigned to two expert reviewers. The final decision to accept or reject a manuscript will be made by the Editorial Boards. After review process, the Editorial Boards will inform the authors of acceptance, rejection or necessity of revision of the manuscript.

**Instructions / Yazım Kuralları**

1. Text (tables, equations, figures, pictures etc.) should be prepared using Microsoft Word Processor with Times New Roman font and 12 point (The title 14 point) size. Manuscripts should be written with 1,5 line spacing on A4 (210 x 297 mm) sized typing paper with 25 mm all margins.
2. The maximum number of pages for original research papers (including tables, figures and references) should be 25 and for the technical notes should be 6 respectively.
3. Paper should be sent online by the journal web site or should be posted CD by journal correspondence address.
4. Text should be written in plain language and narrative, it should be free from any spelling or grammatical errors and the third person singular passive verb should be used.
5. The parts should be in order to (i) Turkish abstract and key words, (ii) English abstract and key words, (iii) main text (Introduction, Material and Methods, Results, Discussions etc.), (iv) symbols, (v) acknowledgements and (vi) references.
6. The title suitable for the content should be clear, as short as possible and centered on the page with the capital letters.
7. All Authors full names should be written as lower case 11 font size in the middle and surname of the authors should be written capital letters. After authors name and surnames, authors' addresses should be stated with superscript numbers (e.g. 1, 2, 3). Corresponding author's full name should be marked with an asterisk (\*). All authors' addresses must be typed with lower case 11 font in the center. The corresponding author's contact address and e-mail address should be given. Names of institutions and cities each authors also must be stated. Authors' name and surname should not indicated any academic title.
8. A brief, informative English and Turkish abstract, not exceeding 200 words, should be typed in 12 font size. Immediately following the abstract, authors should provide at least 3 English and Turkish keywords or phrases that reflect content of the article. The key words should not repeat of the title as possible.
9. Section and sub-section title should be numbered (TS1212).
10. In general, the recommendations of the SI units should be followed. Symbols, formulas and equations should be written with great care, capitals and lower case letters being distinguished where necessary. Unusual symbols employed for the first time should be defined by name in the left-hand margin. Abbreviations require definition when first used.



11. Mathematical expressions should be written by an equation editor (Word format). Each equation in text should be numbered and numbers should be shown in parentheses at the end of the line.
12. The drawings, photos and graphs except the tables should be given as "Figure" in manuscript. Electronically submitted figures and graphs are preferred \*.jpg or \*.tiff formats. Do not give magnification on scales in the figure titles; instead draw bar scales directly on the figures. All the tables and figures must be referred in the text. The numbers and headings of figures must be written below the figure. The numbers and headings of tables should be written the top of the table.
13. SI (System International d'Unités) units should be used.
14. The acknowledgement in the manuscript should be short as possible and it should be indicated if any support is given to work by an institution or a person.
15. Manuscripts submitted for publication in our journal are checked a similarity control software. Similarity report will be sent on the advisory board to be checked. If the similarity control program report results as high similarity, manuscripts are sent back to authors for them to make necessary changes.
16. Literature references are to be numbered consecutively in square brackets. The list of references should be given at the end of the paper in order of their first appearance in the text. Unpublished data should not be used as references. But MSc and PhD thesis, accepted by jury and the manuscripts not published yet if accepted for publication with DOI numbers can be use as references.

References should be provided with the following information:

*If the reference is a journal paper:* Author surname, first name initial(s), title of the paper, journal name, volume number, pages, year.

*Example:* [1] Naghdi, P. M., Kalnins, A., On Vibrations of Elastic Spherical Shells. J. Appl. Mech., C 29, S 65-72, 1962

*If the reference is a book:* Author surname, first name initial(s), title of the book, volume number, editor(s) (if provided), place of print , page interval, year.

*Example:* [2] Kraus. H., Thin Elastic Shells, New York. Wiley, 1967.

*If the reference is a congress presentation:* Author surname, first name initial(s), title of the presentation, name of the congress, seminar or conference, place, page interval, year.

*Example:* [3] Cappleman. O., Communication in the Studio, FIDE'98 International Conference on First Year Architectural Design Education Proceedings, Faculty of Architecture İstanbul Technical University, Cilt V, S 48-54, 1998

*If the reference is a printed thesis:* Author surname, first name initial(s), title of the thesis, thesis type (MSc. or Ph.D), institute submitted, place, page interval, year.

*Example:* [4] Özşahin. B., Yalıtım Kalıplı Donatılı Beton Duvarlı Binaların Yapımsal ve Ekonomik Uygulanabilirliği, Ph.D, Trakya University Graduate School of Natural and Applied Sciences, P 5-9, 2011

*If the reference is a source publication:* Author surname, first name initial(s), report name, name of the organization (if the report is prepared by an organization), report number (if applicable), place, page interval, year.

*Example:* [5] Makarewicz. J.C., Lewis. T., Bertram. P., Epilimnetic Phytoplankton and Zooplankton Biomass and Species Composition in Lake Michigan, 1983-1982, IL EPA 905-R-95-009, U.S EPA Great Lakes Natioanl Program, Chicago, 1995

*For Electronic Encyclopedia and books:* Author surname, first name initial(s), title of the paper, journal name, website name and web address, date of access

*Example:* [6] Pieper. C. M., Introduction to Activity Based Costing, A Technical Bulletin From ABC Technologies, www.abctech.com 1998, 12.10.2014



**MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ DERGİSİ**  
JOURNAL of ENGINEERING and SCIENCE  
http://fbdergi.klu.edu.tr

**TELİF HAKLARI DEVİR FORMU**

Makale Adı: .....

Yazarların Ad/ları: .....

Biz aşağıda imzaları bulunan yazarlar, sunduğumuz makalenin orijinal olduğunu; başka bir yerde yayınlanmak üzere verilmediğini, daha önce yayınlamadığını, eğer, tümüyle ya da bir bölümü yayınlandı ise yukarıda adı geçen dergide yayınlanabilmesi için gerekli her türlü iznin alındığını ve orijinal telif hakkı devir formu ile birlikte Kırklareli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi Editörlüğü'ne gönderildiğini garanti ederiz.

Makalenin telif haklarından feragat etmeyi kabul ederek sorumluluğu üstelenir ve imza ederiz.  
Bu vesileyle makalenin telif hakkı Kırklareli Üniversitesi'ne devredilmiştir. Kırklareli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi Editörlüğü makalenin yayınlanabilmesi konusunda yetkili kılınmıştır. Bununla birlikte yazar/ların aşağıdaki hakları saklıdır:

1. Telif Hakkın dışında kalan patent vb. bütün tescil edilmiş haklar.
2. Yazarın gelecekteki yapacağı kitap ve dersler gibi çalışmalarında; makalenin tümü veya bir bölümünü ücret ödemeksizin kullanma hakkı.
3. Makaleyi satmamak koşulu ile kendi amaçları için çoğaltma hakkı.

Yazar Adı: Tarih: ...../...../..... İmza:

Yazar Adı: Tarih: ...../...../..... İmza:

Yazar Adı: Tarih: ...../...../..... İmza:

Yazar Adı: Tarih: ...../...../..... İmza:

Yazar Adı: Tarih: ...../...../..... İmza:

Yazar Adı: Tarih: ...../...../..... İmza:

(Yazar isimleri makaledeki sıraya göre yazılacak ve Telif Hakları Devir Formu tüm yazarlar tarafından imzalanacaktır.)

**Makaleyi Gönderen Sorumlu Yazar:**

Adı -Soyadı:

Yazışma Adresi:

Telefon: ( )

Fax: ( )

E-posta:

Bu form makale hakem incelemesi için dergi editörlüğünce kabul edildikten sonra doldurulup imzalandıktan sonra basılı 2 nüsha halinde "Kırklareli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Kavaklı Yerleşkesi Değirmencik Yolu Üzeri Kavaklı/ Kırklareli" adresine gönderilmelidir.



**JOURNAL of ENGINEERING and SCIENCE**  
MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ DERGİSİ  
http://fbedergi.klu.edu.tr

**COPYRIGHT TRANSFER FORM**

Manuscript Title: .....

Full names of all authors: .....

The undersigned authors, we guarantee that our submitted manuscript is original work; it has not been published and is not being submitted or considered for publication elsewhere, if, in whole or part of publication of the magazine was published for the above-mentioned receipt of all necessary permits and was sent to Editorial Office of Kırklareli University Journal of Engineering and Science with copyright transfer form.

We agree to waive the right to assume the responsibility of the copyright of the article and thank signature. This article is hereby transferred to the copy right of Kırklareli University. Kırklareli University Journal of Engineering and Science Editor of the publication the article is authorized. However, the authors reverse the following rights:

1. All proprietary rights Copyrights outside, such as patents.
2. to use, free of charge, all parts of this article for the authors' future works in books, lectures.
3. the right to reproduce the article for their own purposes provided the copies are not offered for sale.

Author Name: Date: ...../...../..... Signature:

Author Name: Date: ...../...../..... Signature:

Author Name: Date: ...../...../..... Signature:

Author Name: Date: ...../...../..... Signature:

Author Name: Date: ...../...../..... Signature:

Author Name: Date: ...../...../..... Signature:

(The authors will be written in the order of to appear on manuscript and copyright transfer form should be signed by all authors)

**Corresponding Author's:**

Name-Surname:

Address:

Phone: ( )

Fax: ( )

E-mail:

Please, fill in this form after your manuscript accepted by journal editorial for referee review, sign and sent two copies published form to address: "Kırklareli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Kavaklı Yerleşkesi Değirmencik Yolu Üzeri Kavaklı/ Kırklareli"